

Παραρτήματα

Π.7

Συχνοεμφανιζόμενα όρια

Στο παράρτημα αυτό θα επαληθεύσουμε τα όρια (4) έως (6) της Ενότητας 8.1, Πίνακας 8.1.

Όριο 4: Αν $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ Πρέπει να δείξουμε ότι σε κάθε $\epsilon > 0$ θα αντιστοιχεί ένας ακέραιος N τέτοιος ώστε $|x^n| < \epsilon$ για κάθε n μεγαλύτερο του N . Εφόσον $\epsilon^{1/n} \rightarrow 1$, για $|x| < 1$, θα υπάρχει ένας ακέραιος N για τον οποίο $\epsilon^{1/N} > |x|$. Με άλλα λόγια,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon. \quad (1)$$

Ο ακέραιος αυτός είναι ο ζητούμενος, διότι αν $|x| < 1$ θα ισχύει

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{για κάθε } n > N. \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε $|x^n| < \epsilon$ για κάθε $n > N$, ό.έ.δ.

Όριο 5: Για κάθε αριθμό x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Έστω

$$a_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Στην περίπτωση αυτή

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \rightarrow x,$$

όπως μπορούμε να δούμε από την ακόλουθη εφαρμογή του κανόνα του l'Hôpital, όπου παραγωγίζουμε ως προς n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + x/n)}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x/n} = x. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3, Ενότητα 8.1, με $f(x) = e^x$, οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^x.$$

Όριο 6: Για κάθε αριθμό $x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ Εφόσον

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!},$$

αρκεί να δείξουμε ότι $|x|^n/n! \rightarrow 0$. Στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα «σάντουιτς» για ακολουθίες (Ενότητα 8.1, Θεώρημα 2), ώστε να καταλήξουμε ότι $x^n/n! \rightarrow 0$.

Το πρώτο βήμα για να δείξουμε ότι $|x|^n/n! \rightarrow 0$ είναι να επιλέξουμε έναν ακέραιο $M > |x|$, τέτοιον ώστε $(|x|/M) < 1$. Βάσει του ορίου 4, που μόλις αποδείξαμε, έχουμε $(|x|/M)^n \rightarrow 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε $n > M$. Για τις τιμές αυτές του n , μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot M \cdot \underbrace{(M+1)(M+2) \cdot \cdots \cdot n}_{(n-M) \text{ παράγοντες}}} \\ &\leq \frac{|x|^n}{M! M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M! M^n} = \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Η σταθερά $M^M/M!$ μένει αμετάβλητη καθώς το n αυξάνεται. Συνεπώς, το θεώρημα «σάντουιτς» μας λέει ότι $|x|^n/n! \rightarrow 0$ εφόσον $(|x|/M)^n \rightarrow 0$.

Π.8

Απόδειξη του θεωρήματος του Taylor

Το παρόν παράρτημα αποδεικνύει το θεώρημα του Taylor (Ενότητα 8.7, Θεώρημα 16) στην ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 16 Θεώρημα του Taylor

Αν η f και οι μέχρι n τάξεως παράγωγοί της $f', f'', \dots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ ή στο $[b, a]$, και η $f^{(n)}$ είναι διαφορίσιμη στο (a, b) ή στο (b, a) , τότε θα υπάρχει ένας αριθμός c μεταξύ των a και b τέτοιος ώστε

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$

όπου

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε το θεώρημα του Taylor υποθέτοντας ότι $a < b$. Η απόδειξη για $a > b$ είναι ουσιαστικά η ίδια.

Για κάθε x στο διάστημα $[a, b]$, το πολυώνυμο του Taylor

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

και οι μέχρι n τάξεως παράγωγοί του συμπίπτουν με τη συνάρτηση f και τις μέχρι n τάξεως παραγώγους της αντίστοιχα για $x = a$. Αυτή η σύμπτωση τιμών δεν αλλοιώνεται αν προσθέσουμε άλλον ένα όρο της μορφής $K(x-a)^{n+1}$, όπου K τυχούσα σταθερά, διότι τόσο ο όρος

αυτός όσο και οι μέχρι n τάξεως παράγωγοί του μηδενίζονται στο $x = a$. Η νέα συνάρτηση

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x - a)^{n+1}$$

και οι μέχρι n τάξεως παράγωγοί της εξακολουθούν να συμπίπτουν με την f και τις μέχρι n τάξεως παραγώγους της στο $x = a$.

Επιλέγουμε τώρα τη συγκεκριμένη τιμή του K για την οποία η καμπύλη $y = \phi_n(x)$ συμπίπτει με την αρχική καμπύλη $y = f(x)$ στο $x = b$. Με άλλα λόγια,

$$f(b) = P_n(b) + K(b - a)^{n+1} \text{ δηλαδή } K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b - a)^{n+1}}. \quad (1)$$

Για την τιμή αυτή του K , η συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

ισούται με τη διαφορά μεταξύ της αρχικής συνάρτησης f και της προσεγγιστικής συνάρτησης ϕ_n για κάθε x στο $[a, b]$.

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα του Rolle (Ενότητα 3.2). Κατ' αρχάς, εφόσον $F(a) = F(b) = 0$, και τόσο η F όσο και η F' είναι συνεχείς στο $[a, b]$, γνωρίζουμε ότι

$$F'(c_1) = 0 \quad \text{για κάποιο } c_1 \text{ στο } (a, b).$$

Στη συνέχεια, εφόσον $F'(a) = F'(c_1) = 0$, και τόσο η F' όσο και η F'' είναι συνεχείς στο $[a, c_1]$, γνωρίζουμε ότι

$$F''(c_2) = 0 \quad \text{για κάποιο } c_2 \text{ στο } (a, c_1).$$

Το θεώρημα του Rolle, εφαρμοζόμενο διαδοχικά στις F'' , F''' , ..., $F^{(n-1)}$, συνεπάγεται ότι θα υπάρχουν τα

$$\begin{aligned} c_3 \text{ στο } (a, c_2) & \quad \text{τέτοιο ώστε } F'''(c_3) = 0, \\ c_4 \text{ στο } (a, c_3) & \quad \text{τέτοιο ώστε } F^{(4)}(c_4) = 0, \\ & \vdots \\ c_n \text{ στο } (a, c_{n-1}) & \quad \text{τέτοιο ώστε } F^{(n)}(c_n) = 0. \end{aligned}$$

Τέλος, επειδή η $F^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[a, c_n]$ και διαφορίσιμη στο (a, c_n) , και $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$, το θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι θα υπάρξει αριθμός c_{n+1} στο (a, c_n) τέτοιος ώστε

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0. \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας $n + 1$ φορές την $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x - a)^{n+1}$, παίρνουμε

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n + 1)!K. \quad (3)$$

Συνδυαζόμενες οι Εξισώσεις (2) και (3) μας δίνουν

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \text{ για κάποιον αριθμό } c = c_{n+1} \text{ στο } (a, b). \quad (4)$$

Οι Εξισώσεις (1) και (4) μας δίνουν

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (b - a)^{n+1}. \quad (5)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη.

Π.9

0 επιμεριστικός νόμος για εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων

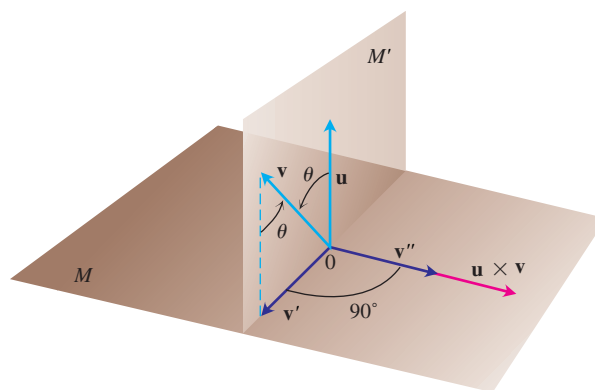
Θα αποδείξουμε εδώ τον επιμεριστικό νόμο

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

δηλ. την Ιδιότητα 2 της Ενότητας 10.2.

Απόδειξη Για να αποδείξουμε τον επιμεριστικό νόμο, κατασκευάζουμε το γινόμενο $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ με έναν νέο τρόπο. Σχεδιάζουμε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ με κοινή αρχή το σημείο O και κατασκευάζουμε ένα επίπεδο M κάθετο στο $\mathbf{u}$ στο O (Σχήμα A.12). Στη συνέχεια προβάλλουμε το $\mathbf{v}$ κάθετα στο M , οπότε προκύπτει το διάνυσμα $\mathbf{v}'$ μήκους $|\mathbf{v}| \sin \theta$. Περιστρέφουμε το $\mathbf{v}'$ κατά 90° ως προς το $\mathbf{u}$ και με δεξιόστροφη φορά, ώστε να παραγάγουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}''$. Τέλος, πολλαπλασιάζουμε το $\mathbf{v}''$ με το μέτρο του $\mathbf{u}$. Το προκύπτον διάνυσμα $|\mathbf{u}| \mathbf{v}''$ ισούται με το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ εφόσον το $\mathbf{v}''$ έχει εκ κατασκευής ίδια φορά με το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (Σχήμα A.12) και εφόσον

$$|\mathbf{u}| |\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

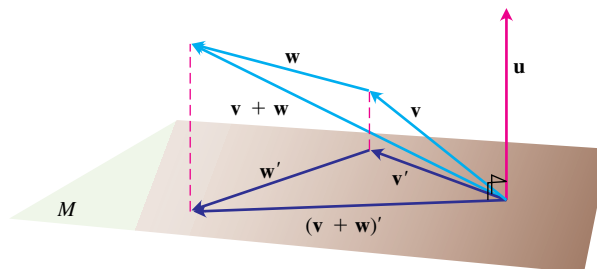


ΣΧΗΜΑ A.12 Όπως εξηγείται στο κείμενο, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \mathbf{v}''$.

Και οι τρεις αυτές πράξεις, δηλαδή

1. προβολή στο M
2. περιστροφή ως προς το $\mathbf{u}$ κατά 90°
3. πολλαπλασιασμός με το βαθμωτό $|\mathbf{u}|$

όταν εφαρμοσθούν σε τρίγωνο του οποίου το επίπεδο δεν είναι παράλληλο στο $\mathbf{u}$, θα παραγάγουν ένα άλλο τρίγωνο. Αν λοιπόν ξεκινήσουμε με τρίγωνο που έχει πλευρές $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, και $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (Σχήμα A.13) και εφαρμόσουμε τις τρεις αυτές πράξεις, θα πάρουμε διαδοχικά τα εξής:



ΣΧΗΜΑ A.13 Τα διανύσματα $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, και οι προβολές τους στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\mathbf{u}$.

1. Τρίγωνο με πλευρές $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, και $(\mathbf{v} + \mathbf{w})'$ που ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$

2. Τρίγωνο με πλευρές $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$, και $(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$ που ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

(τα διστονούμενα διανύσματα φαίνονται στο Σχήμα Α.12)

3. Τρίγωνο με πλευρές $|\mathbf{u}| \mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}| \mathbf{w}''$, και $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$ που ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση

$$|\mathbf{u}| \mathbf{v}'' + |\mathbf{u}| \mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τα $|\mathbf{u}| \mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}| \mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, και $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, παίρνουμε

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

ο.έ.δ.

Π.10 Ορίζουσες και ο κανόνας του Cramer

Ένας ορθογώνιος πίνακας αριθμών του τύπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

καλείται **μήτρα**. Η μήτρα A καλείται 2 επί 3 μήτρα διότι έχει δύο γραμμές και τρεις στήλες. Μια m επί n μήτρα έχει m γραμμές και n στήλες, ενώ το **στοιχείο** (αριθμός) της μήτρας που βρίσκεται στη γραμμή i και στη στήλη j συμβολίζεται με a_{ij} . Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

έχει

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= 3, \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= -2. \end{aligned}$$

Αν μια μήτρα έχει ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών καλείται **τετραγωνική**. Πιο συγκεκριμένα, αν έχει n γραμμές (στήλες), καλείται **τετραγωνική μήτρα τάξης n** .

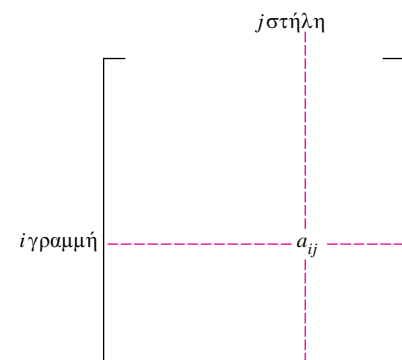
Σε κάθε τετραγωνική μήτρα A αντιστοιχούμε έναν αριθμό που συμβολίζουμε $\det A$ ή $|a_{ij}|$, τον οποίο καλούμε **ορίζουσα** της A . Η ορίζουσα υπολογίζεται ως εξής. Για $n = 1$ και $n = 2$, ορίζουμε

$$\det [a] = a \tag{1}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{2}$$

Για μήτρα τάξης 3, γράφουμε

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{άθροισμα όλων των προ-} \\ \text{σημασμένων γινομένων} \\ \text{της μορφής } \pm a_{1i} a_{2j} a_{3k}, \end{matrix} \tag{3}$$



Οι κατακόρυφες γραμμές στον συμβολισμό $|a_{ij}|$ δεν δηλώνουν απόλυτη τιμή.

όπου i, j, k είναι κάποια μετάθεση των 1, 2, 3. Συνολικά υπάρχουν $3! = 6$ τέτοιες μεταθέσεις, και άρα το άθροισμα της Εξίσωσης (3) έχει έξι όρους. Το πρόσημο είναι θετικό όταν ο δείκτης της μετάθεσης είναι άρτιος και αρνητικό όταν είναι περιττός.

Ορισμός Δείκτης μεταθέσεως

Συμβολίζουμε μια τυχούσα μετάθεση των αριθμών 1, 2, 3, ..., n , ως $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$. Στη διάταξη αυτή, ενδέχεται κάποιοι από τους αριθμούς που έπονται του i_1 να είναι μικρότεροί του i_1 να είναι μικρότεροί του i_1 . Ο αριθμός αυτών καλείται αριθμός αντιστροφών της διάταξης που αφορούν το i_1 . Ομοίως, υπάρχει ένας αριθμός αντιστροφών που αφορούν καθένα από τα υπόλοιπα i : ο αριθμός αυτός ισούται με το πλήθος των όρων που έπονται του συγκεκριμένου i στη διάταξη και που είναι μικρότεροί του. Ο δείκτης της μεταθέσεως είναι το άθροισμα όλων των αριθμών των αντιστροφών που αφορούν τους επιμέρους όρους.

Παράδειγμα 1 Εύρεση του δείκτη μετάθεσης

Για $n = 5$, η μετάθεση

$$5 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4$$

έχει τέσσερις αντιστροφές που αφορούν το πρώτο στοιχείο, 5, δύο αντιστροφές που αφορούν το δεύτερο στοιχείο, 3, και καμία άλλη, οπότε ο δείκτης της μετάθεσης είναι $4 + 2 = 6$.

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τις μεταθέσεις των αριθμών 1, 2, 3, τον δείκτη κάθε μετάθεσης, και το προσημασμένο γινόμενο που θα εισαχθεί στην ορίζουσα της Εξίσωσης (3).

Μετάθεση	Δείκτης	Προσημασμένο γινόμενο
1 2 3	0	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
1 3 2	1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
2 1 3	1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
2 3 1	2	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
3 1 2	2	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
3 2 1	3	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Το άθροισμα των έξι προσημασμένων γινομένων είναι

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ο τύπος

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (4)$$

ανάγει τον υπολογισμό μιας 3 επί 3 ορίζουσας σε υπολογισμό τριών 2 επί 2 οριζουσών.

Ένας μνημονικός κανόνας για τον υπολογισμό της ορίζουσας μήτρας 3 επί 3 είναι ο εξής:

(5)

Ελάσσονες ορίζουσες και αλγεβρικά συμπληρώματα

Οι ορίζουσες δεύτερης τάξης που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (4) καλούνται **ελάσσονες ορίζουσες** των στοιχείων της αρχικής μήτρας που πολλαπλασιάζουν. Έτσι,

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ είναι η ελάσσων του } a_{11}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ είναι η ελάσσων του } a_{12},$$

κ.ο.κ. Η ελάσσων του στοιχείου a_{ij} της μήτρας A είναι η ορίζουσα της μήτρας που απομένει αφού διαγράψουμε τη γραμμή και τη στήλη που περιέχουν το a_{ij} .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \text{η ελάσσων του } a_{22} \text{ είναι } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \text{η ελάσσων του } a_{23} \text{ είναι } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** A_{ij} του a_{ij} ισούται με το γινόμενο του παράγοντα $(-1)^{i+j}$ επί την ελάσσονα ορίζουσα του a_{ij} . Συνεπώς,

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ο παράγοντας $(-1)^{i+j}$ αλλάζει το πρόσημο της ελάσσονος ορίζουσας όταν το $i+j$ είναι περιττός. Το ακόλουθο σχεδιάγραμμα βοηθά στην απομνημόνευση των αλλαγών προσημού:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Στην άνω αριστερά γωνία, έχουμε $i=1, j=1$ και $(-1)^{1+1} = +1$. Καθώς μεταβαίνουμε από κάποια θέση της αρχικής μήτρας σε γειτονική της θέσης που ανήκει στην ίδια γραμμή ή στήλη, μεταβάλλουμε το i κατά 1 ή το j κατά 1, αλλά όχι και τα δύο ταυτόχρονα, οπότε ο εκθέτης του (-1) γίνεται άρτιος από περιττός ή περιττός από άρτιος, πράγμα που αλλάζει το πρόσημο από $+$ σε $-$ ή από $-$ σε $+$.

Αν ξαναγράψουμε την Εξίσωση (4) συναρτήσει των αλγεβρικών συμπληρωμάτων, παίρνουμε

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (6)$$

Παράδειγμα 2 Δύο τρόποι εύρεσης ορίζουσας

Βρείτε την ορίζουσα της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση 1**Βάσει της Εξίσωσης (6)**

Τα αλγεβρικά συμπληρώματα είναι

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Για να βρούμε την $\det A$, πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής της μήτρας A με το αλγεβρικό του συμπλήρωμα και αθροίζουμε:

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1 + 6) - 1(3 + 4) + 3(9 + 2) = 10 - 7 + 33 = 36. \end{aligned}$$

Λύση 2**Βάσει του Κανόνα (5)**

Έχουμε

Αλλάζουμε αυτά τα πρόσημα

Διατηρούμε αυτά τα πρόσημα

$$\det A = -(-6) - (-12) - 3 + (-2) + (-4) + 27 = 36$$

Αναπτύσσοντας σε στήλες ή σε άλλες γραμμές

Η ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα μπορεί να υπολογισθεί βάσει των αλγεβρικών συμπληρωμάτων οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης.

Αν αναπτύσσαμε την ορίζουσα του Παραδείγματος 2 βάσει των στοιχείων της τρίτης στήλης, για παράδειγμα, θα παίρναμε

$$\begin{aligned} &+3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(9 + 2) + 2(6 - 2) + 1(-2 - 3) = 33 + 8 - 5 = 36. \end{aligned}$$

Χρήσιμες προτάσεις περί οριζουσών

Πρόταση 1: Αν δύο γραμμές (ή στήλες) είναι ταυτόσημες, η ορίζουσα μηδενίζεται.

Πρόταση 2: Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές (ή δύο στήλες) το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει.

Πρόταση 3: Η ορίζουσα ισούται με το άθροισμα των γινομένων των

στοιχείων της γραμμής (ή στήλης) i επί τα αλγεβρικά της συμπληρώματα, για κάθε i .

Πρόταση 4: Η ορίζουσα της ανάστροφης μήτρας ισούται με την ορίζουσα της αρχικής μήτρας. (Η **ανάστροφη** μήτρα έχει για γραμμές τις στήλες της αρχικής μήτρας.)

Πρόταση 5: Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή στήλης) με μια σταθερά c , η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με c .

Πρόταση 6: Αν όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο (ή όλα τα στοιχεία κάτω από αυτήν) είναι μηδέν, τότε η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. (Η **κύρια διαγώνιος** ξεκινά από το άνω αριστερά στοιχείο και καταλήγει στο κάτω δεξιά στοιχείο.)

Παράδειγμα 3 Χρήση της πρότασης 6

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(-2)(5) = -30$$

Πρόταση 7: Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία τυχούσας γραμμής με τα αλγεβρικά συμπληρώματα των αντίστοιχων στοιχείων διαφορετικής γραμμής και προσθέσουμε τα γινόμενα αυτά, θα πάρουμε μηδέν.

Παράδειγμα 4 Χρήση της πρότασης 7

Αν A_{11} , A_{12} , A_{13} είναι τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της πρώτης γραμμής της μήτρας $A = (a_{ij})$, τότε τα αθροίσματα

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$$

(στοιχεία της δεύτερης γραμμής επί τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της πρώτης γραμμής) και

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}$$

είναι μηδέν.

Πρόταση 8: Αν τα στοιχεία μιας στήλης πολλαπλασιαστούν με τα αλγεβρικά συμπληρώματα των αντίστοιχων στοιχείων μιας διαφορετικής στήλης και τα γινόμενα αυτά προστεθούν, το άθροισμα είναι μηδέν.

Πρόταση 9: Αν σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής προστεθεί το γινόμενο μιας σταθεράς c επί το αντίστοιχο στοιχείο άλλης γραμμής, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται. Η αντίστοιχη πρόταση ισχύει για στήλες.

Παράδειγμα 5 Πρόσθεση πολλαπλασίου μιας γραμμής σε άλλη γραμμή

Αν ξεκινήσουμε με τη μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

και προσθέσουμε στη γραμμή 2 το γινόμενο του -2 επί τη γραμμή 1 (δηλαδή αν αφαιρέσουμε το διπλάσιο γινόμενο της γραμμής 1 από τη γραμμή 2), θα πάρουμε

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον $\det A = 36$ (Παράδειγμα 2), θα πρέπει να ισχύει ότι $\det B = 36$. Και πράγματι έτσι είναι, όπως δείχνει ο ακόλουθος υπολογισμός:

$$\begin{aligned} \det B &= -(-18) - (-48) - (-1) + (-6) + (-16) + (-9) \\ &= 18 + 48 + 1 - 6 - 16 - 9 = 67 - 31 = 36. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6 Υπολογισμός μιας ορίζουσας τέταρτης τάξης με εφαρμογή της πρότασης 9

Υπολογίστε την ορίζουσα τέταρτης τάξης

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Λύση Αφαιρούμε από τη γραμμή 2 το γινόμενο του 2 επί τη γραμμή 1 και προσθέτουμε τη γραμμή 1 στη γραμμή 3, οπότε παίρνουμε

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχα αλγεβρικά συμπληρώματα, οπότε

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(4 + 2) - (-6)(0 + 1) + 0 = 36.$$

Κανόνας του Cramer

Αν $D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, τότε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \quad (7)$$

θα έχει είτε άπειρο πλήθος λύσεων είτε καθόλου λύσεις. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου η ορίζουσα είναι

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

έχει άπειρες λύσεις. Με άλλα λόγια, μπορούμε να βρούμε άπειρα x για δεδομένο y τα οποία να ικανοποιούν τις εξισώσεις αυτές. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση. Αν $x + y = 0$, η ποσότητα $2x + 2y = 2(x + y)$ δεν μπορεί να ισούται με 2.

Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα (7) έχει μοναδική λύση, την οποία μας δίνει ο κανόνας του Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}. \quad (8)$$

Ο αριθμητής στον παραπάνω τύπο του x προκύπτει αντικαθιστώντας την πρώτη στήλη της ορίζουσας της μήτρας A (τη στήλη των συντελεστών των x) με τη στήλη που αποτελείται από τα b_1 και b_2 (στήλη των b). Αν πάλι αντικαταστήσουμε τη στήλη των συντελεστών των y με τη στήλη των b , προκύπτει ο αριθμητής του τύπου για το y .

Παράδειγμα 7 Χρήση του κανόνα του Cramer

Επιλύστε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x - y &= 9 \\ x + 2y &= -4. \end{aligned}$$

Λύση Χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις (8). Η ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών είναι

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{18 - 4}{7} = \frac{14}{7} = 2 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-12 - 9}{7} = \frac{-21}{7} = -3. \end{aligned}$$

Με παρόμοιες μεθόδους αντιμετωπίζουμε συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Αν

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

θα έχει είτε άπειρες λύσεις είτε καμία λύση. Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα θα έχει μοναδική λύση, η οποία θα δίνεται από τον κανόνα του Cramer:

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Με παρόμοιο τρόπο χειριζόμαστε και τις περισσότερες διαστάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α.10

Υπολογισμός ορίζουσών

Υπολογίστε τις παρακάτω ορίζουσες.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Υπολογίστε τις παρακάτω ορίζουσες χρησιμοποιώντας τα αλγεβρικά συμπληρώματα (α) της τρίτης γραμμής και (β) της δεύτερης στήλης.

$$5. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Συστήματα εξισώσεων

Λύστε τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

$$9. \begin{cases} x + 8y = 4 \\ 3x - y = -13 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 7 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ x + y + z = 1 \\ 5y + 7z = 10 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x - z = 3 \\ 2y - 2z = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Θεωρία και παραδείγματα

17. **Άπειρες λύσεις ή καμία λύση** Βρείτε τιμές των h και k για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + hy = 8 \\ x + 3y = k \end{cases}$$

έχει (α) άπειρες λύσεις, (β) καμία λύση.

18. **Μηδενική ορίζουσα** Για ποια τιμή του x θα ισχύει

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

19. **Μηδενική ορίζουσα** Έστω u , v , και w διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις του x που ικανοποιούν τη σχέση $au + bv + cw = 0$, όπου a , b , και c είναι σταθερές, όχι όλες μηδέν. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

20. **Μερικά κλάσματα** Αν αναπτύξουμε το πηλίκο

$$\frac{ax + b}{(x - r_1)(x - r_2)}$$

με μερικά κλάσματα, καλούμαστε να βρούμε τιμές των C και D που να ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{ax + b}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{C}{x - r_1} + \frac{D}{x - r_2}$$

για κάθε x .

(α) Βρείτε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που καθορίζει τα C και D .

(β) **Μάθετε γράφοντας** Υπό ποιες προϋποθέσεις έχει μοναδική λύση το σύστημα εξισώσεων του ερωτήματος (α); Με άλλα λόγια, πότε θα διαφέρει από το μηδέν η ορίζουσα της μήτρας συντελεστών του συστήματος;

Π.11

Το θεώρημα των μεικτών παραγώγων και το θεώρημα μεταβολών

Στο παρόν παράρτημα αποδεικνύουμε το θεώρημα μεικτών παραγώγων (Θεώρημα 2, Ενότητα 11.3) καθώς και το θεώρημα μεταβολών για συναρτήσεις δύο μεταβλητών (Θεώρημα 3, Ενότητα 11.3). Το πρώτο εξ αυτών δημοσιεύθηκε από τον Euler το 1734, σε μια σειρά άρθρων υδροδυναμικής.

Θεώρημα 2 Θεώρημα των μεικτών παραγώγων

Αν η $f(x, y)$ και οι μερικές της παράγωγοι f_x , f_y , f_{xy} , και f_{yx} ορίζονται σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού χωρίου που περιέχει το σημείο (a, b) , και είναι όλες συνεχείς στο (a, b) , τότε $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Απόδειξη Η ισότητα των $f_{xy}(a, b)$ και $f_{yx}(a, b)$ μπορεί ναδειχθεί εφαρμόζοντας τέσσερις φορές το θεώρημα μέσης τιμής (Θεώρημα 4, Ενότητα 3.2). Εξ υποθέσεως, το σημείο (a, b) κείται στο εσωτερικό του ορθογώνιου R του επιπέδου xy όπου οι f , f_x , f_y , f_{xy} , και f_{yx} είναι ορισμένες. Θεωρούμε h και k τέτοια ώστε το σημείο $(a + h, b + k)$ να ανήκει επίσης στο R , και εξετάζουμε τη διαφορά

$$\Delta = F(a + h) - F(a), \quad (1)$$

όπου

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b). \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στην F , η οποία είναι συνεχής, όντας διαφορίσιμη, οπότε η Εξίσωση (1) γίνεται

$$\Delta = hF'(c_1), \quad (3)$$

όπου το c_1 κείται μεταξύ των a και $a + h$. Από την Εξίσωση (2), έχουμε

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

οπότε η Εξίσωση (3) γίνεται

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)]. \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής στη συνάρτηση $g(y) = f_x(c_1, y)$ και παίρνουμε

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

δηλαδή

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

για κάποιο d_1 μεταξύ των b και $b + k$. Αντικαθιστώντας στην Εξίσωση (4), παίρνουμε

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \quad (5)$$

για κάποιο σημείο (c_1, d_1) του ορθογώνιου παραλληλογράμμου R' του οποίου οι κορυφές είναι τα τέσσερα σημεία (a, b) , $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$, και $(a, b + k)$. (Δείτε το Σχήμα Α.14.)

Από τις Εξισώσεις (1) και (2), έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} \Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)] \\ &= \phi(b + k) - \phi(b), \end{aligned} \quad (6)$$

όπου

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y). \quad (7)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στην Εξίσωση (6) και παίρνουμε

$$\Delta = k\phi'(d_2) \quad (8)$$

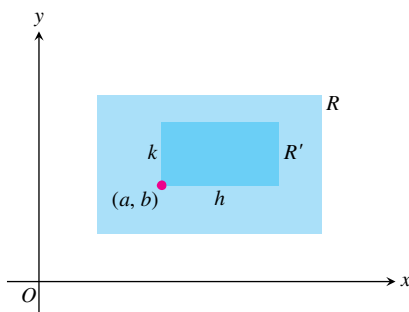
για κάποιο d_2 μεταξύ των b και $b + k$. Από την Εξίσωση (7), έχουμε

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \quad (9)$$

Από τις Εξισώσεις (8) και (9) τώρα παίρνουμε

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

Τέλος, εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στην έκφραση εντός των αγκυλών, οπότε



ΣΧΗΜΑ Α.14 Το «κλειδί» στην απόδειξη ότι $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ είναι ότι ανεξάρτητα του πόσο μικρό είναι το ορθογώνιο R' , οι f_{xy} και f_{yx} θα έχουν ίσες τιμές κάπου στο εσωτερικό του R' (όχι απαραίτητα στο ίδιο σημείο).

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \quad (10)$$

για κάποιο c_2 μεταξύ των a και $a + h$.

Συνδυάζόμενες, οι Εξισώσεις (5) και (10) λένε ότι

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \quad (11)$$

όπου τα (c_1, d_1) και (c_2, d_2) ανήκουν στο ορθογώνιο χωρίο R' (Σχήμα Α.14). Η Εξίσωση (11) δεν είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που ζητούμε, αφού το μόνο που μας λέει είναι ότι η f_{xy} έχει την ίδια τιμή στο (c_1, d_1) που η f_{yx} έχει στο (c_2, d_2) . Ωστόσο, τα h και k μπορούν να γίνουν όσο μικρά θέλουμε. Η υπόθεση ότι οι f_{xy} και f_{yx} είναι αμφότερες συνεχείς στο (a, b) σημαίνει ότι $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ και $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$, όπου $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ καθώς $h, k \rightarrow 0$. Συνεπώς, αν h και $k \rightarrow 0$, θα ισχύει $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Η ισότητα των $f_{xy}(a, b)$ και $f_{yx}(a, b)$ μπορεί να δειχθεί και με υποθέσεις ασθενέστερες αυτών που θεωρήσαμε εδώ. Για παράδειγμα, αρκεί να υπάρχουν οι f , f_x , και f_y στο R και η f_{xy} να είναι συνεχής στο (a, b) . Τότε η f_{yx} θα υπάρχει στο (a, b) και θα ισούται με την f_{xy} στο σημείο εκείνο.

Θεώρημα μεταβολών συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Έστω ότι οι πρώτες μερικές παράγωγοι της $z = f(x, y)$ ορίζονται σε κάθε σημείο ανοιχτού χωρίου R που περιέχει το σημείο (x_0, y_0) και ότι οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) . Στην περίπτωση αυτή, η μεταβολή $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ της τιμής της f που προκύπτει κατά τη μετατόπιση από το σημείο (x_0, y_0) στο $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ του R θα ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

όπου $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ καθώς $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Απόδειξη Θεωρούμε ορθογώνιο χωρίο T με κέντρο $A(x_0, y_0)$ το οποίο (ορθογώνιο) κείται εντός του R , και υποθέτουμε ότι τα Δx και Δy είναι ήδη τόσο μικρά ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα A και $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα B και $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ανήκουν στο εσωτερικό του T (Σχήμα Α.15).

Θεωρούμε το Δz ως το άθροισμα $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ δύο μεταβολών, όπου

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

είναι η μεταβολή της f από το A στο B , και

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

είναι η μεταβολή της f από το B στο C (Σχήμα Α.16).

Στο κλειστό διάστημα τιμών του x μεταξύ x_0 και $x_0 + \Delta x$, η συνάρτηση $F(x) = f(x, y_0)$ είναι διαφορίσιμη (και άρα συνεχής) συνάρτηση του x , με παράγωγο

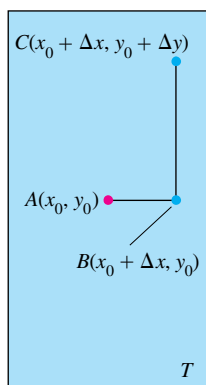
$$F'(x) = f_x(x, y_0).$$

Βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής (Θεώρημα 4, Ενότητα 3.2), θα υπάρχει μια τιμή του x (ας την πούμε c) μεταξύ x_0 και $x_0 + \Delta x$ για την οποία θα ισχύει

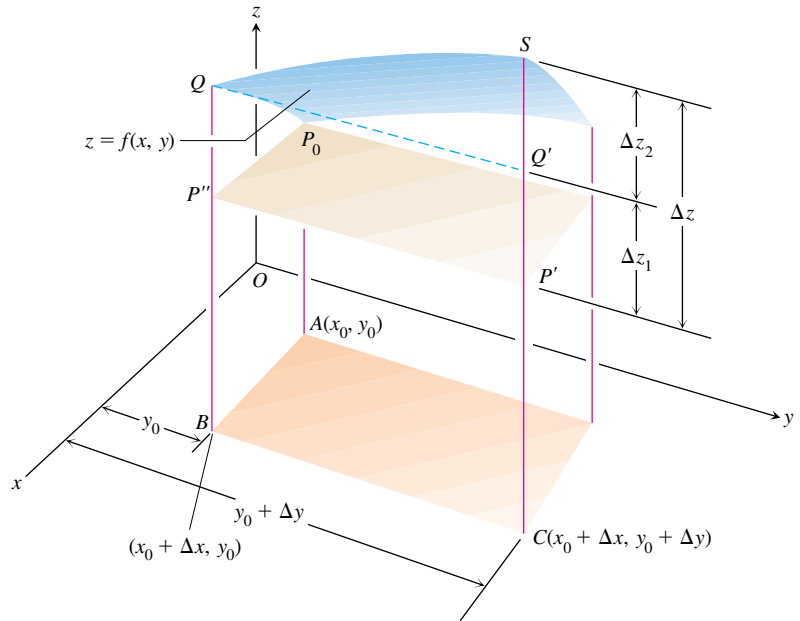
$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c) \Delta x$$

δηλαδή

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0) \Delta x$$



ΣΧΗΜΑ Α.15 Το ορθογώνιο χωρίο T της απόδειξης του θεωρήματος μεταβολών. Στο σχήμα υποθέτουμε ότι τα Δx και Δy είναι θετικά, αλλά μπορούν επίσης να είναι μηδέν ή αρνητικά.



ΣΧΗΜΑ Α.16 Τμήμα της επιφάνειας $z = f(x, y)$ κοντά στο $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Τα σημεία P_0 , P' , και P'' έχουν το ίδιο ύψος $z_0 = f(x_0, y_0)$ πάνω από το επίπεδο xy . Η μεταβολή του z είναι $\Delta z = P'S$. Η μεταβολή

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

που στο σχήμα είναι $P''Q = P'Q'$, προκύπτει καθώς το x μεταβάλλεται από x_0 σε $x_0 + \Delta x$, ενώ το y παραμένει σταθερό και ίσο με y_0 . Στη συνέχεια, κρατώντας το x σταθερό και ίσο με $x_0 + \Delta x$, έχουμε

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

καθώς το y μεταβάλλεται από y_0 σε $y_0 + \Delta y$. Η μεταβολή αυτή του z απεικονίζεται από το τμήμα $Q'S$. Η ολική μεταβολή του z είναι το άθροισμα των Δz_1 και Δz_2 .

Στο κλειστό διάστημα τιμών του x μεταξύ x_0 και $x_0 + \Delta x$, η συνάρτηση $F(x) = f(x, y_0)$, είναι διαφορίσιμη (και άρα συνεχής) συνάρτηση του x , με παράγωγο

$$F'(x) = f'_x(x, y_0).$$

Βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής (Θεώρημα 4, Ενότητα 3.2) θα υπάρξει μία τιμή του x (ας την πούμε c) μεταξύ των x_0 και $x_0 + \Delta x$ για το οποίο θα ισχύει

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c) \Delta x$$

δηλαδή

$$F(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(c, y_0) \Delta x$$

οπότε

$$\Delta z_1 = f'_x(c, y_0) \Delta x. \quad (12)$$

Ομοίως, η $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ είναι διαφορίσιμη (και άρα συνεχής) συνάρτηση του y στο κλειστό διάστημα μεταξύ των y_0 και $y_0 + \Delta y$, με παράγωγο

$$G'(y) = f'_y(x_0 + \Delta x, y).$$

Συνεπώς, θα υπάρξει μια τιμή του y (ας την πούμε d) μεταξύ των y_0 και $y_0 + \Delta y$ τέτοια ώστε

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d) \Delta y$$

δηλαδή

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y$$

οπότε

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y. \quad (13)$$

Τώρα, καθώς Δx και $\Delta y \rightarrow 0$, γνωρίζουμε ότι $c \rightarrow x_0$ και $d \rightarrow y_0$. Κατά συνέπεια, εφόσον οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) , οι ποσότητες

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (14)$$

θα τείνουν στο μηδέν καθώς Δx και $\Delta y \rightarrow 0$.

Τέλος,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0) \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d) \Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2] \Delta y \quad \begin{array}{l} \text{Από τις (12)} \\ \text{και (13)} \end{array} \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \quad \text{Από τη (14)} \end{aligned}$$

όπου ϵ_1 και $\epsilon_2 \rightarrow 0$ καθώς Δx και $\Delta y \rightarrow 0$, ό.έ.δ.

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για συναρτήσεις οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων μεταβλητών. Έστω ότι οι πρώτες μερικές παράγωγοι της $w = f(x, y, z)$ ορίζονται σε κάθε σημείο ανοιχτού χωρίου που περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0) και ότι οι f_x , f_y , και f_z είναι συνεχείς στο (x_0, y_0, z_0) . Στην περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \end{aligned} \quad (15)$$

όπου $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow 0$ καθώς $\Delta x, \Delta y$, και $\Delta z \rightarrow 0$.

Οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, f_z της Εξίσωσης (15) αναφέρονται στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Η Εξίσωση (15) μπορεί να αποδειχθεί αν θεωρήσουμε το Δw ως το άθροισμα τριών μεταβολών,

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \quad (16)$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \quad (17)$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \quad (18)$$

και εφαρμόσουμε στην καθεμία χωριστά το θεώρημα μέσης τιμής. Για κάθε τέτοια μεταβολή $\Delta w_1, \Delta w_2$, και Δw_3 , οι δύο συντεταγμένες παραμένουν σταθερές και μεταβάλλεται η τρίτη. Στην Εξίσωση (17), για παράδειγμα, μόνο το y μεταβάλλεται, εφόσον το x παραμένει ίσο με $x_0 + \Delta x$ και το z παραμένει ίσο με z_0 . Εφόσον η $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ είναι συνεχής συνάρτηση του y και της παραγώγου f_y , θα ικανοποιεί το θεώρημα μέσης τιμής, οπότε θα έχουμε

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0) \Delta y$$

για κάποιο y_1 μεταξύ του y_0 και $y_0 + \Delta y$.

Π.12

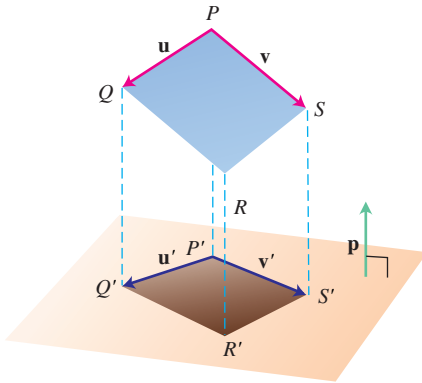
Εμβαδόν προβολής παραλληλογράμμου σε επίπεδο

Στο παράρτημα αυτό αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 13.5, ότι $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$ είναι το εμβαδόν της προβολής του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, σε επίπεδο του οποίου το κάθετο διάνυσμα είναι $\mathbf{p}$. (Δείτε το Σχήμα Α.17.)

Θεώρημα

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ σχηματίζουν στον χώρο έναν παραλληλόγραμμο. Το εμβαδόν της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου σε επίπεδο με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{p}$ είναι

$$\text{Εμβαδόν} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|.$$



ΣΧΗΜΑ Α.17 Το παραλληλόγραμμο που ορίζουν στον χώρο τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, καθώς και η ορθογώνια προβολή του παραλληλογράμμου στο επίπεδο. Οι ευθείες προβολής είναι κάθετες στο επίπεδο και παράλληλες στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{p}$.

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Σχήματος Α.17, όπου φαίνεται ένα τυπικό παραλληλόγραμμο οριζόμενο από τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, καθώς και η ορθογώνια προβολή του σε επίπεδο με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{p}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \vec{PP'} + \mathbf{u'} + \vec{Q'Q} \\ &= \mathbf{u'} + \vec{PP'} - \vec{QQ'} \quad (\vec{Q'Q} = -\vec{QQ'}) \\ &= \mathbf{u'} + s\mathbf{p}. \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(\text{Για κάποιο βαθμωτό } s, \text{ εφόσον το } \\ &(\vec{PP'} = -\vec{QQ'}) \text{ είναι παράλληλο στο } \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v'} + t\mathbf{p}$$

για κάποιο βαθμωτό t . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{u'} + s\mathbf{p}) \times (\mathbf{v'} + t\mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{u'} \times \mathbf{v'}) + s(\mathbf{p} \times \mathbf{v'}) + t(\mathbf{u'} \times \mathbf{p}) + \underbrace{st(\mathbf{p} \times \mathbf{p})}_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Τα διανύσματα $\mathbf{p} \times \mathbf{v'}$ και $\mathbf{u'} \times \mathbf{p}$ είναι αμφότερα ορθογώνια στο $\mathbf{p}$. Έτσι, όταν υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο της Εξίσωσης (1) με το $\mathbf{p}$, ο μόνος όρος που απομένει στο δεξιό μέλος είναι $(\mathbf{u'} \times \mathbf{v'}) \cdot \mathbf{p}$. Δηλαδή,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{u'} \times \mathbf{v'}) \cdot \mathbf{p}.$$

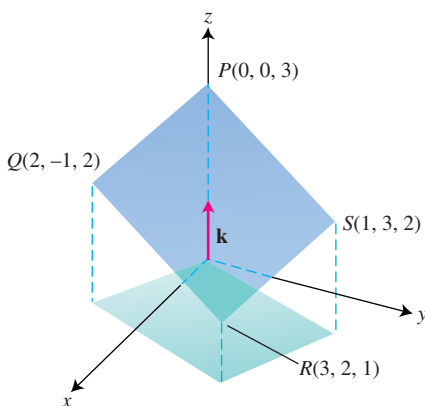
Έτσι,

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u'} \times \mathbf{v'}) \cdot \mathbf{p}|. \quad (2)$$

Η απόλυτη τιμή στο δεξιό μέλος είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα $\mathbf{u'}$, $\mathbf{v'}$, και $\mathbf{p}$. Το ύψος του παραλληλεπιπέδου αυτού είναι $|\mathbf{p}| = 1$, οπότε ο όγκος του θα ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν βάσης του, που είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $P'Q'R'S'$. Συνδυάζοντας την παρατήρηση αυτή με την Εξίσωση (2) παίρνουμε

$$\text{Εμβαδόν } P'Q'R'S' = |(\mathbf{u'} \times \mathbf{v'}) \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|,$$

που σημαίνει ότι το εμβαδόν της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, σε επίπεδο με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{p}$, είναι $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$, που είναι και το ζητούμενο.



ΣΧΗΜΑ Α.18 Στο Παράδειγμα 1 υπολογίζουμε το εμβαδόν της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου $PQRS$ στο επίπεδο xy .

Παράδειγμα 1 Εύρεση εμβαδού προβολής

Βρείτε το εμβαδόν της ορθογώνιας προβολής στο επίπεδο xy του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα σημεία $P(0, 0, 3)$, $Q(2, -1, 2)$, $R(3, 2, 1)$, και $S(1, 3, 2)$ (Σχήμα Α.18)

Λύση Για

$$\mathbf{u} = \vec{PQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \vec{PS} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \text{και} \quad \mathbf{p} = \mathbf{k},$$

το εμβαδόν είναι

$$\text{Εμβαδόν} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Απαντήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ενότητα 8.1, σελ. 596–598

1. $a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = -\frac{2}{9}, a_4 = -\frac{3}{16}$
3. $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{5}, a_4 = -\frac{1}{7}$
5. $a_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1$
7. $a_n = n^2 - 1, n \geq 1$
9. $a_n = 4n - 3, n \geq 1$
11. $a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, n \geq 1$
13. Συγκλίνει, 2
15. Συγκλίνει, -1
17. Αποκλίνει
19. Αποκλίνει
21. Συγκλίνει, $\frac{1}{2}$
23. Συγκλίνει, $\sqrt{2}$
25. Συγκλίνει, 0
27. Συγκλίνει, 0
29. Αποκλίνει
31. Συγκλίνει, e^7
33. Συγκλίνει, 1
35. Συγκλίνει, 1
37. Συγκλίνει, 4
39. Συγκλίνει, 0
41. Αποκλίνει
43. Συγκλίνει, e^{-1}
45. Συγκλίνει, $e^{2/3}$
47. Συγκλίνει, $x (x > 0)$
49. Συγκλίνει, 0
51. Συγκλίνει, $\frac{\pi}{2}$
53. Συγκλίνει, 0
55. Συγκλίνει, 0
57. $N = 692, a_n = \sqrt[n]{0,5}, L = 1$
59. $N = 65, a_n = (0,9)^n, L = 0$
61. $(\beta) \sqrt{2}$
63. $(\beta) 1$

Ενότητα 8.2, σελ. 505–607

1. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$
3. $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$
5. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$
7. $(\beta) \sqrt{3}$
9. (α) $f(x) = x^2 - 2, 1,414213562 \approx \sqrt{2}$
(β) $f(x) = \tan(x) - 1, 0,7853981635 \approx \frac{\pi}{4}$
(γ) $f(x) = e^x$, αποκλίνει
11. Μη φθίνουσα, φραγμένη
13. Η ακολουθία δεν είναι μη φθίνουσα, είναι όμως φραγμένη
15. Συγκλίνει, θεώρημα μονότονων ακολουθιών
17. Συγκλίνει, θεώρημα μονότονων ακολουθιών
19. Αποκλίνει, ορισμός απόκλισης
21. Συγκλίνει, θεώρημα μονότονων ακολουθιών
23. Αποκλίνει, ορισμός απόκλισης ακολουθίας

27. 1
29. -0,73908513
31. 0,85375017

Ενότητα 8.3, σελ. 616–618

1. $s_n = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)}, 3$
3. $s_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)}, \frac{2}{3}$
5. $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2}$
7. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots, \frac{4}{5}$
9. $(5+1) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{27} \right) + \dots, \frac{23}{2}$
11. $(1+1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{125} \right) + \dots, \frac{17}{6}$
13. 1
15. 5
17. 1
19. Συγκλίνει, $2 + \sqrt{2}$
21. Συγκλίνει, 1
23. Συγκλίνει, $\frac{e^2}{e^2 - 1}$
25. Συγκλίνει, $\frac{x}{x-1}$
27. Αποκλίνει
29. Αποκλίνει
31. Αποκλίνει
33. $a = 1, r = -x$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1+x}$ για $|x| < 1$
35. $a = 3, r = \frac{x-1}{2}$, συγκλίνει στο $\frac{6}{3-x}$ για x στο διάστημα $(-1, 3)$
37. $|x| < \frac{1}{2}, \frac{1}{1-2x}$
39. $1 < x < 5, \frac{2}{x-1}$
41. $\frac{23}{99}$
43. $\frac{7}{9}$
45. $\frac{41.333}{33.300}$
47. 28 m
49. 8 m²
51. (α) $3 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$
(β) $A_n = A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)A + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-2}A, \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

53. (α) $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$

(β) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

(γ) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$

55. $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$

61. Αποκλίνει.

Ενότητα 8.4, σελ. 628–630

1. Αποκλίνει
3. Αποκλίνει
5. Συγκλίνει
7. Συγκλίνει
9. Αποκλίνει: $\frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{2n + n} = \frac{1}{3n}$
11. Συγκλίνει: $\frac{\sin^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$
13. Συγκλίνει: $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
15. Αποκλίνει: σύγκριση με τον n -στό όρο της $\sum \frac{1}{n}$
17. Συγκλίνει: σύγκριση με τον n -στό όρο της $\sum \frac{1}{n^2}$
19. Συγκλίνει: σύγκριση με τον n -στό όρο της $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$
21. Συγκλίνει, $\rho = 1/2$
23. Αποκλίνει, $\rho = \infty$
25. Συγκλίνει, $\rho = 1/10$
27. Συγκλίνει, $\rho = 0$
29. Συγκλίνει, $\rho = 0$
31. Συγκλίνει, $\rho = 0$
33. Αποκλίνει, $\rho = \infty$
35. Συγκλίνει: γεωμετρική σειρά, $r = \frac{1}{e} < 1$
37. Αποκλίνει: p -σειρά, $p < 1$
39. Αποκλίνει: σύγκριση με τον n -στό όρο της $\sum \frac{1}{n}$
41. Συγκλίνει: σύγκριση με τον n -στό όρο της $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$
43. Συγκλίνει: κριτήριο του λόγου
45. Συγκλίνει: κριτήριο του λόγου
47. Συγκλίνει: κριτήριο του ολοκληρώματος
49. Συγκλίνει: κριτήριο του ολοκληρώματος
51. Συγκλίνει: σύγκριση με τη σειρά $\sum \frac{3}{(1.25)^n}$
53. Συγκλίνει: σύγκριση με τη σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$
55. Συγκλίνει: σύγκριση με τη σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$
57. Συγκλίνει: $\frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n^{1.1}}$
59. Αποκλίνει: κριτήριο n -οστού όρου
61. Συγκλίνει: κριτήριο του λόγου
63. Αποκλίνει: κριτήριο του λόγου
65. Αποκλίνει: $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(1/n!)} \rightarrow 1$
71. $a = 1$

Ενότητα 8.5, σελ. 637–639

1. Συγκλίνει λόγω του Θεωρήματος 8
3. Αποκλίνει: $a_n \not\rightarrow 0$
5. Συγκλίνει λόγω του Θεωρήματος 8
7. Αποκλίνει: $a_n \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$

9. Συγκλίνει λόγω του Θεωρήματος 8

11. Συγκλίνει απολύτως. Η σειρά απόλυτων τιμών είναι μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά.

13. Συγκλίνει υπό συνθήκη. $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$ αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ αποκλίνει.

15. Συγκλίνει απολύτως. Σύγκριση με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

17. Συγκλίνει υπό συνθήκη. $\frac{1}{n+3} \rightarrow 0$ αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

αποκλίνει. Σύγκριση με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

19. Αποκλίνει: $\frac{3+n}{5+n} \rightarrow 1$

21. Συγκλίνει υπό συνθήκη: $\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ αλλά $\frac{1+n}{n^2} > \frac{1}{n}$.

23. Συγκλίνει απολύτως: κριτήριο του λόγου

25. Συγκλίνει απολύτως βάσει του κριτηρίου του ολοκληρώματος

27. Αποκλίνει: $a_n \not\rightarrow 0$

29. Συγκλίνει απολύτως βάσει του κριτηρίου του λόγου

31. Συγκλίνει απολύτως: $\frac{1}{n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{n^2}$

33. Συγκλίνει απολύτως εφόσον

$$\left| \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \right| = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ (συγκλίνουσα } p\text{-σειρά).}$$

35. Συγκλίνει απολύτως βάσει του κριτηρίου n -οστής ρίζας

37. Αποκλίνει: $a_n \rightarrow \infty$

39. Συγκλίνει υπό συνθήκη:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0,$$

αλλά η σειρά απόλυτων τιμών αποκλίνει. Σύγκριση με τη σειρά $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

41. Αποκλίνει: $a_n \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$

43. Συγκλίνει απολύτως:

$$\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n} + 1} < \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n},$$

που είναι όρος συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς.

45. $|\Sigma\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| < 0,2$

47. $|\Sigma\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| < 2 \times 10^{-11}$

49. 0,54030

51. (α) Δεν πληρούται η προϋπόθεση ότι $a_n \geq a_{n+1}$

(β) $-\frac{1}{2}$

Ενότητα 8.6, σελ. 646–648

1. (α) $1, -1 < x < 1$ (β) $-1 < x < 1$ (γ) Για καμία τιμή
3. (α) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} < x < 0$ (β) $-\frac{1}{2} < x < 0$ (γ) Για καμία τιμή
5. (α) $10, -8 < x < 12$ (β) $-8 < x < 12$ (γ) Για καμία τιμή
7. (α) $1, -1 < x < 1$ (β) $-1 < x < 1$ (γ) Για καμία τιμή
9. (α) $3, [-3, 3]$ (β) $[-3, 3]$ (γ) Για καμία τιμή
11. (α) ∞ , για κάθε x (β) Για κάθε x (γ) Για καμία τιμή
13. (α) ∞ , για κάθε x (β) Για κάθε x (γ) Για καμία τιμή

15. (α) $1, -1 \leq x < 1$ (β) $-1 < x < 1$ (γ) $x = -1$
 17. (α) $5, -8 < x < 2$ (β) $-8 < x < 2$ (γ) Για καμία τιμή
 19. (α) $3, -3 < x < 3$ (β) $-3 < x < 3$ (γ) Για καμία τιμή
 21. (α) $1, -1 < x < 1$ (β) $-1 < x < 1$ (γ) Για καμία τιμή
 23. (α) $0, x = 0$ (β) $x = 0$ (γ) Για καμία τιμή
 25. (α) $2, -4 < x \leq 0$ (β) $-4 < x < 0$ (γ) $x = 0$
 27. (α) $1, -1 \leq x \leq 1$ (β) $-1 \leq x \leq 1$ (γ) Για καμία τιμή
 29. (α) $\frac{1}{4}, 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (β) $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (γ) Για καμία τιμή
 31. (α) $1, (-1 - \pi) \leq x < (1 - \pi)$
 (β) $(-1 - \pi) < x < (1 - \pi)$
 (γ) $x = -1 - \pi$
 33. $-1 < x < 3, \frac{4}{3 + 2x - x^2}$
 35. $0 < x < 16, \frac{2}{4 - \sqrt{x}}$
 37. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \frac{3}{2 - x^2}$
 39. $1 < x < 5, \frac{2}{x - 1}, 1 < x < 5, \frac{-2}{(x - 1)^2}$
 41. (α) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$ συγκλί-
 νει για κάθε x
 (β) και (γ) $2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{2^7 x^7}{7!} + \frac{2^9 x^9}{9!} - \frac{2^{11} x^{11}}{11!} + \dots$
 43. (α) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14.175}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
 (β) $1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \dots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Ενότητα 8.7, σελ. 658–660

1. $P_0(x) = 0, P_1(x) = x - 1, P_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2,$
 $P_3(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$
 3. $P_0(x) = \frac{1}{2}, P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}, P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8},$
 $P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$
 5. $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$
 $P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2, P_3(x) =$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$
 7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
 9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
 13. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
 15. $8 + 10(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3$
 17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$ 19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$
 21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n}{n!} = 1 - 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} - \frac{5^3 x^3}{3!} + \dots$
 23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^3 x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5 x^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7 x^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \dots$
 27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$
 29. $x - \frac{\pi^2 x^3}{2!} + \frac{\pi^4 x^5}{4!} - \frac{\pi^6 x^7}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!}$
 31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} = \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} + \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6!} - \frac{(2x)^8}{2 \cdot 8!} + \dots$
 33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n x^{n+1}}{n} = 2x^2 - \frac{2^2 x^3}{2} + \frac{2^3 x^4}{3} - \frac{2^4 x^5}{4} + \dots$
 35. $|x| < (0,06)^{1/5} < 0,56968$
 37. $|\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| < \frac{(10^{-3})^3}{6} < 1,67 \times 10^{-10}, -10^{-3} < x < 0$
 39. (α) $|\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| < \frac{(3^{0,1})(0,1)^3}{6} < 1,87 \times 10^{-4}$
 (β) $|\Sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| < \frac{(0,1)^3}{6} < 1,67 \times 10^{-4}$
 45. (α) $L(x) = 0$ (β) $Q(x) = -\frac{x^2}{2}$
 47. (α) $L(x) = 1$ (β) $Q(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$

Ενότητα 8.8, σελ. 667–668

1. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$
 3. $1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$ 5. $1 - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2}$
 7. $1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$ 9. $1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3}$
 11. $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
 13. $(1-2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$
 15. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$ 17. $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$
 19. $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1$ 21. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$
 23. $y = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n = \frac{2}{1-x}$ 25. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x$
 27. $y = 2 + x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}$
 29. $y = -2(x-2) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \frac{3(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$
 31. $y = a + bx + \frac{1}{6}x^3 -$
 $\frac{ax^4}{3 \cdot 4} - \frac{bx^5}{4 \cdot 5} - \frac{x^7}{6 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{ax^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} +$
 $\frac{bx^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$. Για $n \geq 6, a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)}$
 33. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!}$
 35. (α) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$
 (β) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \frac{x^8}{7 \cdot 8} + \dots + (-1)^{15} \frac{x^{32}}{31 \cdot 32}$
 37. $\frac{1}{2}$ 39. -1
 41. $2!$ 45. 500 όροι

47. (α) $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$, ακτίνα σύγκλισης = 1
 (β) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$

Ενότητα 8.9, σελ. 674

1. $f(x) = 1$ 3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$
 5. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$
 7. $f(x) = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx) \right]$
 9. $f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \sin nx$
 11. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)x$
 13. $f(x) = \frac{5}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right] (\cos(n\pi x) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^n - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin(n\pi x)$
 15. Θέτουμε $x = \pi$, $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi$, δηλ.
 $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$
 17. 0 19. 0 αν $m \neq n$, L αν $m = n$
 21. 0 αν $m \neq n$, 0 αν $m = n$

Ενότητα 8.10, σελ. 681

1. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2} \cos nx$
 3. $f(x) = (e - 1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[e(-1)^n - 1]}{1 + n^2 \pi^2} \cos n\pi x$
 5. $f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^{n+1} + \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] \cos \frac{n\pi x}{2}$
 7. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \left[1 + (-1)^n - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\pi x$
 9. $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x$
 11. $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx$
 13. $f(x) = \sin x$
 15. $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin \frac{n\pi x}{2}$
 17. (α) $f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]$
 (β) Υπολογίζουμε την $f(x)$ στο $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$
 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 8, σελ. 683–686

1. Συγκλίνει στο 1 3. Συγκλίνει στο -1
 5. Αποκλίνει 7. Συγκλίνει στο 0
 9. Συγκλίνει στο 1 11. Συγκλίνει στο e^{-5}
 13. Συγκλίνει στο 3 15. Συγκλίνει στο $\ln 2$
 17. Αποκλίνει 19. $\frac{1}{6}$
 21. $\frac{3}{2}$ 23. $\frac{e}{e-1}$
 25. Αποκλίνει 27. Συγκλίνει υπό συνθήκη
 29. Συγκλίνει υπό συνθήκη 31. Συγκλίνει απολύτως
 33. Συγκλίνει απολύτως 35. Συγκλίνει απολύτως
 37. Συγκλίνει απολύτως 39. Συγκλίνει απολύτως
 41. (α) $3, -7 \leq x < -1$
 (β) $-7 < x < -1$
 (γ) $x = -7$
 43. (α) $\frac{1}{3}, 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ (β) $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ (γ) Για κανένα x
 45. (α) ∞ , για κάθε x (β) Για κάθε x (γ) Για κανένα x
 47. (α) $\sqrt{3}, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
 (β) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
 (γ) Για κανένα x
 49. (α) $e, (-e, e)$ (β) $(-e, e)$ (γ) $\{ \}$
 51. $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$ 53. $\sin x, \pi, 0$
 55. $e^x, \ln 2, 2$ 57. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$
 59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(2n)!}$
 63. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^n}{n!}$
 65. $2 - \frac{(x+1)}{2 \cdot 1!} + \frac{3(x+1)^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{9(x+1)^3}{2^5 \cdot 3!} + \dots$
 67. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} (x-3) + \frac{1}{4^3} (x-3)^2 - \frac{1}{4^4} (x-3)^3 + \dots$
 69. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n = -e^{-x}$
 71. $y = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n = 3e^{-2x}$
 73. $y = -1 - x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 2e^x - 3x - 3$
 75. $y = -1 - x + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 2e^x - 1 - x$
 77. (α) $\frac{7}{2}$ 79. (α) $\frac{1}{12}$
 81. (α) -2 83. $r = -3, s = \frac{9}{2}$
 85. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$
 87. $f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$
 89. $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$
 91. (α) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \cos n\pi x$

$$(\beta) f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin n\pi x$$

$$93. (\alpha) f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} + \frac{\cos [(n-1)\pi]}{n-1} - \frac{\cos [(n+1)\pi]}{n+1} \right] \cos n\pi x$$

$$(\beta) f(x) = \sin \pi x$$

$$95. (\alpha) f(x) = 6 + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{3}$$

$$(\beta) f(x) = \frac{6}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6 - 5n^2\pi^2)(-1)^n - 6}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{3}$$

$$97. (\beta) |\Sigma \phi \lambda \mu| < \sin \left(\frac{1}{42} \right) < 0,02381 \cdot \text{αποτελεί «υποεκτίμηση» διότι το υπόλοιπο είναι θετικό}$$

$$99. \frac{2}{3}$$

$$101. \ln \left(\frac{n+1}{2n} \right) \cdot \text{η σειρά συγκλίνει στο } \ln \left(\frac{1}{2} \right).$$

$$103. (\alpha) \infty \quad (\beta) a = 1, b = 0$$

$$105. \text{Συγκλίνει.}$$

$$113. (\alpha) -3 \text{ είναι το σταθερό σημείο. } (\beta) 0,2 \text{ είναι το σταθερό σημείο.}$$

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 8, σελ. 686–690

$$1. \text{Συγκλίνει κριτήριο άμεσης σύγκρισης}$$

$$3. \text{Αποκλίνει κριτήριο } n\text{-οστού όρου}$$

$$5. \text{Συγκλίνει κριτήριο άμεσης σύγκρισης}$$

$$7. \text{Αποκλίνει κριτήριο } n\text{-οστού όρου}$$

$$9. \text{Για } a = \frac{\pi}{3}, \cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + \dots$$

$$11. \text{Για } a = 0, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$13. \text{Για } a = 22\pi, \cos x = 1 - \frac{1}{2} (x - 22\pi)^2 + \frac{1}{4!} (x - 22\pi)^4 - \frac{1}{6!} (x - 22\pi)^6 + \dots$$

$$15. \text{Συγκλίνει, όριο} = b$$

$$17. \frac{\pi}{2}$$

$$21. (\alpha) \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \quad (\beta) \sqrt{3}b^2$$

$$(\gamma) \text{ Όχι. Για παράδειγμα, οι τρεις κορυφές του αρχικού τριγώνου παραμένουν. Το σύνολο των σημείων που παραμένουν από το αρχικό τριγωνικό χωρίο έχει εμβαδόν 0.}$$

$$23. (\alpha) \text{ Όχι, το όριο δεν δείχνει να εξαρτάται από την τιμή του } a.$$

$$(\beta) \text{ Ναι, το όριο εξαρτάται από την τιμή του } b.$$

$$(\gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\cos \left(\frac{a}{n} \right)}{bn} \right)^n = e^{-1/b}$$

$$25. b = \pm \frac{1}{5}$$

$$29. (\beta) \text{ Ναι}$$

$$35. (\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (\beta) 6 \quad (\gamma) \frac{1}{q}$$

$$37. (\alpha) R_n = \frac{C_0 e^{-kt_0} (1 - e^{-nkt_0})}{1 - e^{-kt_0}}, R = \frac{C_0 (e^{-kt_0})}{1 - e^{-kt_0}} = \frac{C_0}{e^{kt_0} - 1}$$

$$(\beta) R_1 = \frac{1}{e} \approx 0,368, R_{10} = R(1 - e^{-10}) \approx R(0,9999546) \approx 0,58195 \cdot R \approx 0,58198 \cdot 0 < \frac{R - R_{10}}{R} < 0,0001$$

$$(\gamma) 7$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Ενότητα 9.1, σελ. 700–701

$$1. (\alpha) \langle 9, -6 \rangle \quad (\beta) 3\sqrt{13}$$

$$3. (\alpha) \langle 1, 3 \rangle \quad (\beta) \sqrt{10}$$

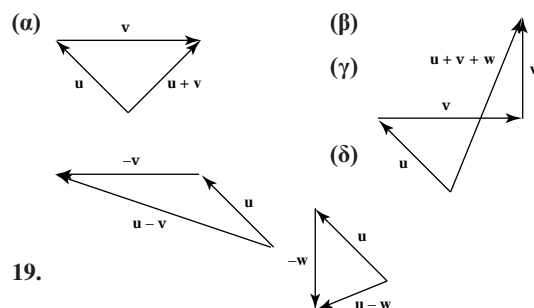
$$5. (\alpha) \langle 12, -19 \rangle \quad (\beta) \sqrt{505}$$

$$7. (\alpha) \left\langle \frac{1}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle \quad (\beta) \frac{\sqrt{197}}{5}$$

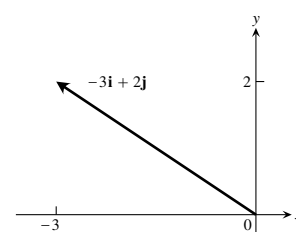
$$9. \langle 1, -4 \rangle \quad 11. \langle -2, -3 \rangle$$

$$13. \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \quad 15. \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

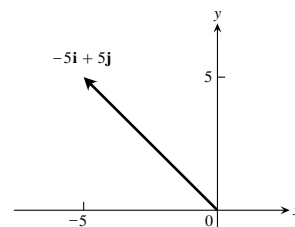
17. Το διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι οριζόντιο και έχει μήκος 2,54 cm. Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{w}$ έχουν μήκη 1,75 cm. Το $\mathbf{w}$ είναι κατακόρυφο, ενώ το $\mathbf{u}$ σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντιο. Όλα τα διανύσματα πρέπει να σχεδιαστούν σε κλίμακα.



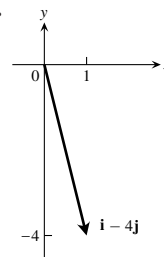
19.



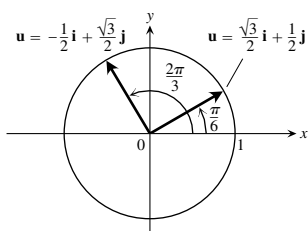
21.



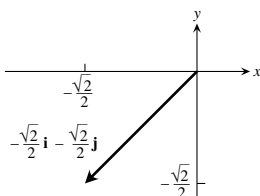
23.



25.



27.



29. $\left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$

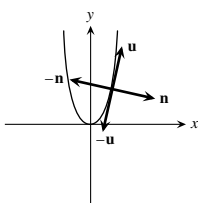
31. $\left\langle -\frac{15}{17}, \frac{8}{17} \right\rangle$

33. $\frac{3}{5} \mathbf{i} - \frac{4}{5} \mathbf{j}$

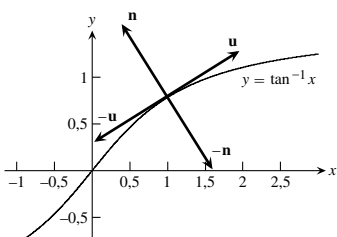
35. $13 \left(\frac{5}{13} \mathbf{i} + \frac{12}{13} \mathbf{j} \right)$

37. $\frac{3}{5} \mathbf{i} - \frac{4}{5} \mathbf{j}$ και $-\frac{3}{5} \mathbf{i} + \frac{4}{5} \mathbf{j}$

39. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{j}$, $-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{j}$,
 $\mathbf{n} = \frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{j}$, $-\mathbf{n} = -\frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{j}$



41. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{5}} (2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$,
 $-\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{5}} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$



43. $\mathbf{u} = \frac{\pm 1}{5} (-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = \frac{\pm 1}{5} (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

45. $\mathbf{u} = \frac{\pm 1}{2} (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = \frac{\pm 1}{2} (-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$

47. $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

49. $5\sqrt{3} \mathbf{i}, 5\mathbf{j}$

51. $\approx \langle -338, 095, 725, 046 \rangle$

53. (α) $(5 \cos 60^\circ, 5 \sin 60^\circ) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$

(β) $(5 \cos 60^\circ + 10 \cos 315^\circ, 5 \sin 60^\circ + 10 \sin 315^\circ) = \left(\frac{5 + \sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}{2} \right)$

Ενότητα 9.2, σελ. 709–710

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	$ \mathbf{v} $	$ \mathbf{u} $
1. -12	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$
$\cos \theta$	$ \mathbf{u} \cos \theta$	$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{6\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{6}{5} \mathbf{i} + \frac{12}{5} \mathbf{j}$
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	$ \mathbf{v} $	$ \mathbf{u} $
3. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$\cos \theta$	$ \mathbf{u} \cos \theta$	$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$
$\frac{\sqrt{30} - \sqrt{20}}{10}$	$\frac{\sqrt{6} - 2}{2}$	$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} (-\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	$ \mathbf{v} $	$ \mathbf{u} $
5. $\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{30}}{6}$	$\frac{\sqrt{30}}{6}$
$\cos \theta$	$ \mathbf{u} \cos \theta$	$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	$\frac{1}{5} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$
7. $\approx 0,64 \text{ rad}$		9. $\approx 1,85$

11. Γωνία $A = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 63,435$ μοίρες, γωνία $B = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) \approx 53,130$ μοίρες, γωνία $C = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 63,435$ μοίρες.

13. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων με ίσα μέτρα είναι πάντα ορθογώνιο με τη διαφορά τους, όπως προκύπτει από την εξίσωση $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2 = 0$.

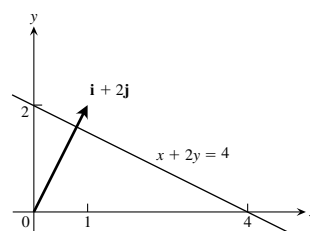
19. Οριζόντια συνιστώσα: $\approx 356,5 \text{ m/sec}$, κατακόρυφη συνιστώσα: $\approx 50,1 \text{ m/sec}$

21. (α) Εφόσον $|\cos \theta| \leq 1$, έχουμε $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\cos \theta| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| (1) = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$.

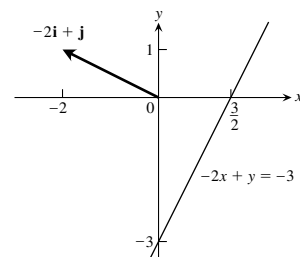
(β) Η ισότητα θα ισχύει ακριβώς για $|\cos \theta| = 1$ ή όταν τουλάχιστον ένα εκ των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι $\mathbf{0}$. Αν και τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά, η ισότητα θα ισχύει για $\theta = 0$ ή π , δηλαδή όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα.

23. α

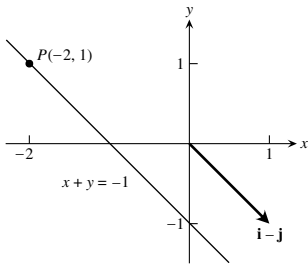
27. $x + 2y = 4$



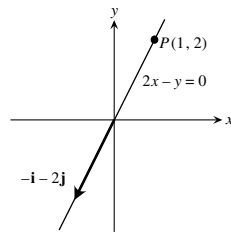
29. $-2x + y = -3$



31. $x + y = -1$



33. $2x - y = 0$



35. 5 J

37. 3464 J

39. $\frac{\pi}{4}$

41. $\frac{\pi}{6}$

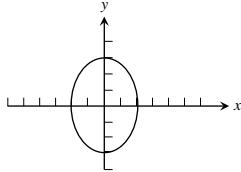
43. 0,14

45. $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{2\pi}{3}$ σε κάθε σημείο

47. Στο (0, 0): $\frac{\pi}{2}$, στο (1, 1): $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{3\pi}{4}$

Ενότητα 9.3, σελ. 719–722

1. (α) $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}$

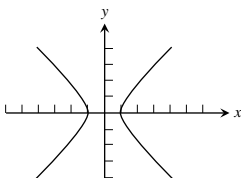


(β) $\mathbf{v}(t) = (-2 \sin t) \mathbf{i} + (3 \cos t) \mathbf{j}$,
 $\mathbf{a}(t) = (-2 \cos t) \mathbf{i} + (-3 \sin t) \mathbf{j}$

(γ) Μέτρο ταχύτητας = 2, φορά = $\langle -1, 0 \rangle$

(δ) Ταχύτητα = $2 \langle -1, 0 \rangle$

3. (α) $\mathbf{r}(t) = \sec(t) \mathbf{i} + \tan(t) \mathbf{j}$



(β) $\mathbf{v} = (\sec t \tan t) \mathbf{i} + (\sec^2 t) \mathbf{j}$, $\mathbf{a}(t) = (\sec t \tan^2 t + \sec^3 t) \mathbf{i} + (2 \sec^2 t \tan t) \mathbf{j}$

(γ) Μέτρο ταχύτητας = $\frac{2\sqrt{5}}{3}$, φορά = $\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$

(δ) Ταχύτητα = $\left(\frac{2\sqrt{5}}{3} \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$

5. $t = 0, \pi, 2\pi$

7. $t = \text{όλα τα μη αρνητικά ακέραια πολλαπλάσια του } \frac{\pi}{2}$

9. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,130 \text{ μοίρες}$

11. (α) 3i

(β) $t \neq 0, -3$

(γ) $t = 0, -3$

13. (α) $y = -1$

(β) $x = 0$

15. $-3\mathbf{i} + (4\sqrt{2} - 2)\mathbf{j}$

17. $(\sec t) \mathbf{i} + (\ln |\sec t|) \mathbf{j} + \mathbf{C}$

19. $\mathbf{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1) \mathbf{i} - (e^{-t} - 1) \mathbf{j}$

21. $\mathbf{r}(t) = (8t + 100) \mathbf{i} + (-16t^2 + 8t) \mathbf{j}$

23. 2

25. (α) $\mathbf{v}(t) = (\cos t) \mathbf{i} - (2 \sin 2t) \mathbf{j}$

(β) $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(γ) $y = 1 - 2x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Το σωματίδιο ξεκινά από το (0, 1), μεταβαίνει στο (1, -1), έπειτα στο (-1, -1), και τέλος επανέρχεται στο (0, 1), διατρέχοντας δύο φορές την καμπύλη.

27. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2} t^2 + \frac{3\sqrt{10}}{5} t + 1 \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{1}{2} t^2 - \frac{\sqrt{10}}{5} t + 2 \right) \mathbf{j}$

29. (α) i. Ταχύτητα σταθερού μέτρου

ii. Ναι, είναι ορθογώνια

iii. Κίνηση με αριστερόστροφη φορά (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού)

iv. Ναι

(β) i. Ταχύτητα σταθερού μέτρου

ii. Ναι, είναι ορθογώνια

iii. Κίνηση με αριστερόστροφη φορά

iv. Ναι

(γ) i. Ταχύτητα σταθερού μέτρου

ii. Ναι, είναι ορθογώνια

iii. Κίνηση με αριστερόστροφη φορά

iv. Όχι

(δ) i. Ταχύτητα σταθερού μέτρου

ii. Ναι, είναι ορθογώνια

iii. Κίνηση με δεξιόστροφη φορά

iv. Ναι

(ε) i. Ταχύτητα μεταβλητού μέτρου

ii. Εν γένει δεν είναι ορθογώνια

iii. Κίνηση με αριστερόστροφη φορά

iv. Ναι

31. (α) 160 sec

(β) 225 m

(γ) $\frac{15}{4} \text{ m/sec}$

33. (α) Παρατηρήστε το κυκλικό τόξο του σχήματος το οποίο εκτείνεται από το σημείο όπου $t = 0$ έως το σημείο “m”. Το μήκος του τόξου αυτού ισούται με $(r_0 \theta)$, αλλά ισούται επίσης και με (vt) . Εξισώνοντας τις δύο ποσότητες παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα.

(β) $\mathbf{a}(t) = -\frac{v^2}{r_0} \left[\left(\cos \frac{vt}{r_0} \right) \mathbf{i} + \left(\sin \frac{vt}{r_0} \right) \mathbf{j} \right]$

(γ) Από το ερώτημα (β), $\mathbf{a}(t) = -\left(\frac{v}{r_0} \right)^2 \mathbf{r}(t)$. Έτσι, βάσει

του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, $\mathbf{F} = -m \left(\frac{v}{r_0} \right)^2 \mathbf{r}$.

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή για την $\mathbf{F}$ στον νόμο της παγκόσμιας έλξης, προκύπτει το αποτέλεσμα.

(δ) Θέτουμε $\frac{vT}{r_0} = 2\pi$ και λύνουμε ως προς vT .

(ε) Αντικαθιστούμε $\frac{2\pi r_0}{T}$ για την ταχύτητα v στον τύπο $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ και λύνουμε ως προς T^2 .

35. (α) Εφαρμόζουμε το πόρισμα χωριστά σε κάθε συνιστώσα.

(β) Προκύπτει αμέσως από το ερώτημα (α) εφόσον δύο οποιεσδήποτε αντιπαράγωγοι του $\mathbf{r}(t)$ οφείλουν να έχουν ταυτόσημες παραγώγους, ήτοι $\mathbf{r}(t)$.

37. Θέτοντας $\mathbf{C} = \langle C_1, C_2 \rangle$, $\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \left\langle \frac{dC_1}{dt}, \frac{dC_2}{dt} \right\rangle = \langle 0, 0 \rangle$.

39. $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$

(α) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle)$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \frac{d}{dt}(u_1 + v_1), \frac{d}{dt}(u_2 + v_2) \right\rangle \\ &= \langle u'_1 + v'_1, u'_2 + v'_2 \rangle \\ &= \langle u'_1, u'_2 \rangle + \langle v'_1, v'_2 \rangle = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}(\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle) \\ &= \left\langle \frac{d}{dt}(u_1 - v_1), \frac{d}{dt}(u_2 - v_2) \right\rangle \\ &= \langle u'_1 - v'_1, u'_2 - v'_2 \rangle \\ &= \langle u'_1, u'_2 \rangle - \langle v'_1, v'_2 \rangle = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

41. $f(t)$ και $g(t)$ διαφορίσιμες στο $c \Rightarrow f(t)$ και $g(t)$ συνεχείς στο $c \Rightarrow \mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ συνεχής στο c .

$$\begin{aligned} 43. (\alpha) \quad \text{Έστω } \mathbf{r}(t) &= f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}. \text{ Τότε } \frac{d}{dt} \int_a^t \mathbf{r}(q) dq = \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t [f(q)\mathbf{i} + g(q)\mathbf{j}] dq = \frac{d}{dt} \left[\left(\int_a^t f(q) dq \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^t g(q) dq \right) \mathbf{j} \right] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \int_a^t f(q) dq \right) \mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt} \int_a^t g(q) dq \right) \mathbf{j} = \\ &= f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} = \mathbf{r}(t). \end{aligned}$$

(β) Έστω $\mathbf{S}(t) = \int_a^t \mathbf{r}(q) dq$. Από το ερώτημα (α) προκύπτει τότε ότι η $\mathbf{S}(t)$ είναι μια αντιπαράγωγος του $\mathbf{r}(t)$. Έστω $\mathbf{R}(t)$ μια τυχούσα αντιπαράγωγος του $\mathbf{r}(t)$. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με την Άσκηση 35, ερώτημα (β), $\mathbf{S}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$. Θέτοντας $t = a$, παίρνουμε $\mathbf{0} = \mathbf{S}(a) = \mathbf{R}(a) + \mathbf{C}$. Συνεπώς, $\mathbf{C} = -\mathbf{R}(a)$ και $\mathbf{S}(t) = \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(a)$. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει αν θέσουμε $t = b$.

Ενότητα 9.4, σελ. 729–732

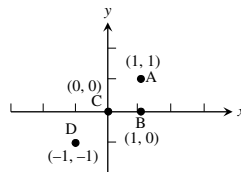
1. 50 sec
3. (α) 72,2 sec, 25.510 m (β) 4020 m (γ) 6378 m
5. $t \approx 2,126$ sec, $x \approx 20,14$ m
7. (α) $v_0 \approx 9,9$ m/sec
(β) $\alpha \approx 18,4^\circ$ ή $71,6^\circ$
9. 305,6 km/h
11. Το μπαλάκι του γκολφ θα περάσει ξυστά από τα πάνω φύλλα του δέντρου.
13. 45,3 m/sec, 2,26 sec 15. $39,3^\circ$ ή $50,7^\circ$
17. 14,2 m/sec 21. 1,89 sec, 21,9 m (περίπου)
23. 1,225 m, 2,39 m/sec
25. (β) Το διάνυσμα $\mathbf{v}_0$ διχοτομεί τη γωνία $\angle AOR$
27. (α) (Δεδομένου ότι το “x” μηδενίζεται στο σημείο βολής της μπάλας.) $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, όπου $x(t) = (11 \cos 27^\circ)t$ και $y(t) = 1,2 + (11 \sin 27^\circ)t - 4,9t^2$.
(β) Για $t \approx 0,51$ sec, το μέγιστο ύψος είναι περίπου 2,472 m.
(γ) Βεληνεκές $\approx 11,96$ m, χρονική διάρκεια κίνησης στον αέρα $\approx 1,22$ sec
(δ) Για $t \approx 0,199$ sec και $t \approx 0,82$ sec, οπότε απέχει $\approx 10,01$ m και $\approx 3,92$ m από το σημείο πρόσκρουσης στο γήπεδο.
(ε) Ναι. Αυτό που θα συμβεί είναι ότι η μπάλα δεν θα περάσει το φιλέ.

$$\begin{aligned} 31. (\alpha) \quad \mathbf{r}(t) &= (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}, \text{ όπου } x(t) = \left(\frac{1}{0,08} \right) (1 - e^{-0,08t}) \\ &= (46 \cos 20^\circ - 5,4) \text{ και } y(t) = 1 + \left(\frac{46}{0,08} \right) (1 - e^{-0,08t}) \\ &= (\sin 20^\circ) + \left(\frac{9,8}{0,08^2} \right) (1 - 0,08t - e^{-0,08t}) \end{aligned}$$

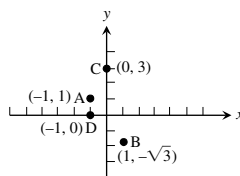
- (β) Για $t \approx 1,5105$ sec, η μπάλα φθάνει σε μέγιστο ύψος το οποίο είναι περίπου 12,642 m.
- (γ) Βεληνεκές $\approx 105,383$ m, χρονική διάρκεια κίνησης στον αέρα ≈ 3152 sec.
- (δ) Για $t \approx 0,936$ sec και $t \approx 2,09$ sec, οπότε απέχει περίπου 34,112 m και 72,928 m από το σημείο βολής.
- (ε) Όχι. Ο άνεμος θα έπρεπε να φυσά ομόρροπα προς την κατεύθυνση βολής της μπάλας και με ταχύτητα μεγαλύτερη από 4655 m/sec για να περάσει η μπάλα τον φράχτη.

Ενότητα 9.5, σελ. 740–742

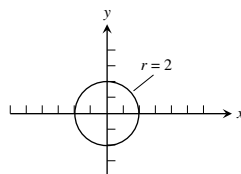
1. Τα (α) και (ε) περιγράφουν το ίδιο σημείο.
Τα (β) και (ζ) περιγράφουν το ίδιο σημείο.
Τα (γ) και (η) περιγράφουν το ίδιο σημείο.
Τα (δ) και (στ) περιγράφουν το ίδιο σημείο.
3. (α) (1, 1) (β) (1, 0) (γ) (0, 0) (δ) (-1, -1)



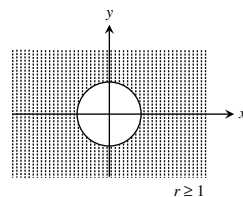
5. (α) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$ ή $\left(\sqrt{2}, -\frac{5\pi}{4} \right)$
(β) $\left(2, -\frac{\pi}{3} \right)$ ή $\left(-2, \frac{2\pi}{3} \right)$
(γ) $\left(3, \frac{\pi}{2} \right)$ ή $\left(3, \frac{5\pi}{2} \right)$
(δ) $(1, \pi)$ ή $(-1, 0)$



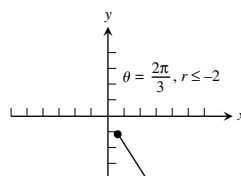
7.



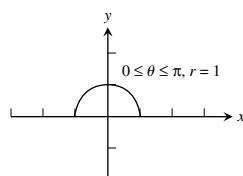
9.



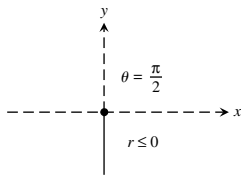
11.



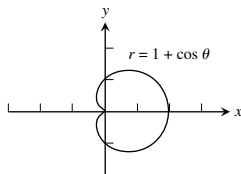
13.



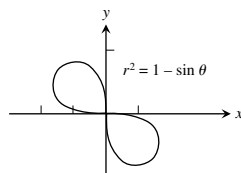
15.

19. $y = 0$, άξονας x 21. $y = 4$, οριζόντια ευθεία23. $x + y = 1$, ευθεία (κλίση = -1 , τεταγμένη = 1)25. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, κύκλος (κέντρο = $(0, 2)$, ακτίνα = 2)27. $xy = 1$ (δηλ. $y = \frac{1}{x}$), υπερβολή29. $y = e^x$, εκθετική καμπύλη31. $y = \ln x$, λογαριθμική καμπύλη33. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, κύκλος (κέντρο = $(-2, 0)$, ακτίνα = 2)35. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, κύκλος (κέντρο = $(1, 1)$, ακτίνα = $\sqrt{2}$)37. $r \cos \theta = 7$ 39. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 41. $r^2 = 4$ δηλ. $r = 2$ 43. $r^2(4 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta) = 36$ 45. $r \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$ 47. $r = 4 \sin \theta$

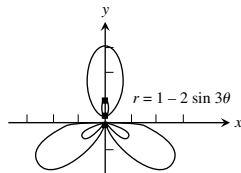
49. (α)

(β) Μήκος διαστήματος = 2π

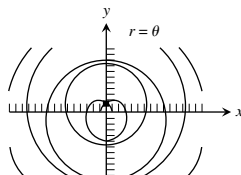
51. (α)

(β) Μήκος διαστήματος = $\frac{\pi}{2}$

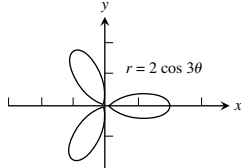
53. (α)

(β) Μήκος διαστήματος = 2π

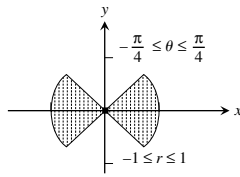
55. (α)

(β) Ζητούμενο διάστημα = $(-\infty, \infty)$

57. (α)

(β) Μήκος διαστήματος = π

17.

59. Άξονας x , άξονας y , αρχή των αξόνων61. Άξονας y 63. (α) Επειδή η εξίσωση $r = a \sec \theta$ είναι ισοδύναμη με την $r \cos \theta = a$, η οποία είναι ισοδύναμη με την καρτεσιανή εξίσωση $x = a$.(β) Η $r = a \csc \theta$ είναι ισοδύναμη με την $y = a$.67. $(0, 0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ 69. $(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\pi}{3}\right)$ 71. $(0, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{8}\right)$ 73. $\left(1, \frac{\pi}{12}\right), \left(1, \frac{5\pi}{12}\right), \left(1, \frac{7\pi}{12}\right), \left(1, \frac{11\pi}{12}\right), \left(1, \frac{13\pi}{12}\right), \left(1, \frac{17\pi}{12}\right), \left(1, \frac{19\pi}{12}\right), \left(1, \frac{23\pi}{12}\right)$

75. Ερώτημα (α)

81. $d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} = [(r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1)^2 + (r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1)^2]^{1/2}$, και κατόπιν απλοποιούμε χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Ενότητα 9.6, σελ. 748-750

1. Για $\theta = 0$: -1 · για $\theta = \pi$: 1 3. Για $(2, 0)$: $-\frac{2}{3}$ · για $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$: 0 · για $(2, \pi)$: $\frac{2}{3}$ · για $\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$: 0 5. $\theta = \frac{\pi}{2}$ [$x = 0$]7. $\theta = 0$ [$y = 0$], $\theta = \frac{\pi}{5}$ [$y = \left(\tan \frac{\pi}{5}\right)x$], $\theta = \frac{2\pi}{5}$ [$y = \left(\tan \frac{2\pi}{5}\right)x$], $\theta = \frac{3\pi}{5}$ [$y = \left(\tan \frac{3\pi}{5}\right)x$], $\theta = \frac{4\pi}{5}$ [$y = \left(\tan \frac{4\pi}{5}\right)x$]9. Οριζόντια εφαπτομένη στο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ [$y = -\frac{1}{4}$],
 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ [$y = -\frac{1}{4}$],
 $\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$ [$y = 2$].κατακόρυφη εφαπτομένη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ [$x = 0$], $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$
 $\left[x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left(-1, 5, \frac{11\pi}{6}\right)$
 $\left[x = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$ 11. Οριζόντια εφαπτομένη στο $(0, 0)$ [$y = 0$], $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ [$y = 2$],
 $(0, \pi)$ [$y = 0$].κατακόρυφη εφαπτομένη στο $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ [$x = 1$],
 $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ [$x = -1$]13. 18π 15. $\frac{\pi}{8}$ 17. 2 19. $\frac{\pi}{2} - 1$ 21. $5\pi - 8$ 23. $3\sqrt{3} - \pi$ 25. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 27. $12\pi - 9\sqrt{3}$

29. (α) $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

33. 8

37. $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

45. (α) $n = \left(\frac{r_0}{b}\right) \left(\sqrt{\frac{bL}{\pi r_0^2} + 1} - 1 \right)$

(β) Το καρούλι θα κινείται όλο και πιο αργά καθώς περνά ο χρόνος.

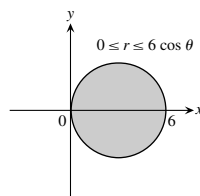
(γ) Εφόσον το L είναι ανάλογο του χρόνου, ο τύπος του ερωτήματος (α) μας δείχνει ότι το n θα αυξάνεται συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας του χρόνου.

31. $\frac{19}{3}$

35. $3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$

39. 2π

31.



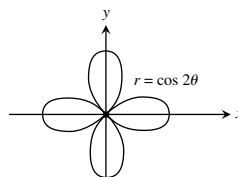
33. (δ)

37. (ια)

41. (α)

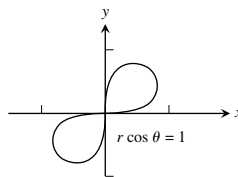
35. (ιβ)

39. (θ)



(β) 2π

43. (α)



(β) $\frac{\pi}{2}$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 9, σελ. 751–755

1. (α) $\langle -17, 32 \rangle$ (β) $\sqrt{1313}$

3. (α) $\langle 6, -8 \rangle$ (β) 10

5. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ [για αριστερόστροφη περιστροφή]

7. $\left\langle \frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right\rangle$

9. Μήκος = 2, κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

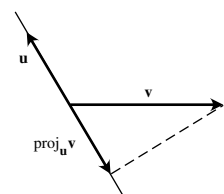
11. $\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=\pi/2} = 2(-\mathbf{i})$

13. Μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα στα σημεία

$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} \right)$, μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα

σημεία $\pm \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} \right)$

15.



17. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{5}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 3$, $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \approx 0,32 \text{ rad}$, $|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\text{proj}_v \mathbf{u} = \frac{3}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

19. $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{5}\mathbf{i} - \frac{1}{5}\mathbf{j} \right) + \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{6}{5}\mathbf{j} \right)$

21. (α) $\mathbf{v}(t) = (-4 \sin t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{j}$,
 $\mathbf{a}(t) = (-4 \cos t)\mathbf{i} + (-\sqrt{2} \sin t)\mathbf{j}$

(β) 3

(γ) $\cos^{-1} \frac{7}{9} \approx 38,942 \text{ μοίρες}$

23. 1

25. 6i

27. $\mathbf{r}(t) = (\cos t - 1)\mathbf{i} + (\sin t + 1)\mathbf{j}$

29. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

45. Εφαπτόμενες ευθείες για $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, και $\frac{7\pi}{4}$. Οι καρτεσιανές εξισώσεις είναι $y = \pm x$.

47. Οριζόντιες εφαπτομένες: $y = 0$, $y \approx \pm 0,443$,
 $y \approx \pm 1,739$
κατακόρυφες εφαπτομένες: $x = 2$, $x \approx 0,067$,
 $x \approx -1,104$

49. $y = \pm x + \sqrt{2}$ και $y = \pm x - \sqrt{2}$

51. $x = y$, ευθεία

53. $x^2 = 4y$, παραβολή

55. $x = 2$, κατακόρυφη ευθεία

57. $r = -5 \sin \theta$

59. $r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta = 16$, δηλ. $r^2 = \frac{16}{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}$

61. $\frac{9\pi}{2}$

63. $2 + \frac{\pi}{4}$

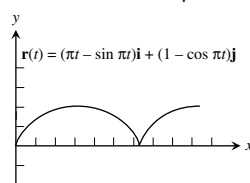
65. 8

67. $\pi - 3$

69. Μέτρο ταχύτητας $\approx 591.982 \text{ km/h}$, κατεύθυνση $\approx 8,179$ μοίρες ανατολικά-βορειοανατολικά

71. Θα προσκρούσει στο έδαφος $\approx 2,073 \text{ sec}$ αργότερα, σε απόσταση 19,056 m από το σημείο βολής. Αν δεν υπήρχε αναπήδηση ή κύλιση, η σφαίρα θα εξακολουθεί να βρίσκεται εκεί 3 sec μετά την εκτόξευσή της.

73. (α)



(β) $\mathbf{v}(0) = \langle 0, 0 \rangle$

$\mathbf{v}(1) = \langle 2\pi, 0 \rangle$

$\mathbf{a}(0) = \langle 0, \pi^2 \rangle$

$\mathbf{a}(1) = \langle 0, -\pi^2 \rangle$

$\mathbf{v}(2) = \langle 0, 0 \rangle$

$\mathbf{v}(3) = \langle 2\pi, 0 \rangle$

$\mathbf{a}(2) = \langle 0, \pi^2 \rangle$

$\mathbf{a}(3) = \langle 0, -\pi^2 \rangle$

(γ) Στο ανώτερο σημείο: $2\pi \text{ m/sec}$ στο κέντρο του τροχού: $\pi \text{ m/sec}$. Αιτιολογικό: Εφόσον ο τροχός διανύει μισή περιφέρεια, ήτοι $\pi \text{ m/sec}$, το κέντρο του τροχού θα διανύει $\pi \text{ m/sec}$. Εφόσον το χείλος του τροχού περιστρέφεται με ρυθμό $\pi \text{ m/sec}$ ως προς το κέντρο, η ταχύτητα του ανώτερου σημείου ως προς

το κέντρο θα είναι π m/sec, οπότε η συνολική ταχύτητα του ανώτερου σημείου θα είναι 2π m/sec.

75. (α) $\approx 18,092$ m/sec

(β) $\approx 22,8$ m/sec

77. Έχουμε $x = (v_0 t) \cos \alpha$ και $y + \frac{gt^2}{2} = (v_0 t) \sin \alpha$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε, οπότε $x^2 + \left(y + \frac{gt^2}{2}\right)^2 = (v_0 t)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = v_0^2 t^2$.

79. (α) $\mathbf{r}(t) = \left[(47,5 \cos 18^\circ - 3,6) \left(\frac{1}{0,09} \right) (1 - e^{-0,09t}) \right] \mathbf{i} +$

$$\left[1 + \left(\frac{47,5 \sin 18^\circ}{0,09} \right) (1 - e^{-0,09t}) + \right.$$

$$\left. \frac{9,8}{0,09^2} (1 - 0,09t - e^{-0,09t}) \right] \mathbf{j}$$

$$x(t) = (47,5 \cos 18^\circ - 3,6) \left(\frac{1}{0,09} \right) (1 - e^{-0,09t})$$

$$y(t) = 1 + \left(\frac{47,5 \sin 18^\circ}{0,09} \right) (1 - e^{-0,09t}) +$$

$$\frac{9,8}{0,09^2} (1 - 0,09t - e^{-0,09t})$$

(β) Κατά τη χρονική στιγμή $\approx 1,405$ sec, η μπάλα θα φθάνει σε μέγιστο ύψος $\approx 11,095$ m.

(γ) Βεληνεκές $\approx 107,55$ m, χρονική διάρκεια κίνησης στον αέρα $\approx 2,945$ sec.

(δ) Κατά τις χρονικές στιγμές $t \approx 0,758$ sec και $t \approx 2,065$ sec, οπότε η μπάλα απέχει $\approx 30,463$ m και $\approx 78,347$ m από το σημείο βολής της.

(ε) Όχι, η μπάλα δεν θα περάσει τον φράχτη. Αν ο συντελεστής τριβής k ήταν μικρότερος από $\approx 0,011$, τότε θα περνούσε τον φράχτη.

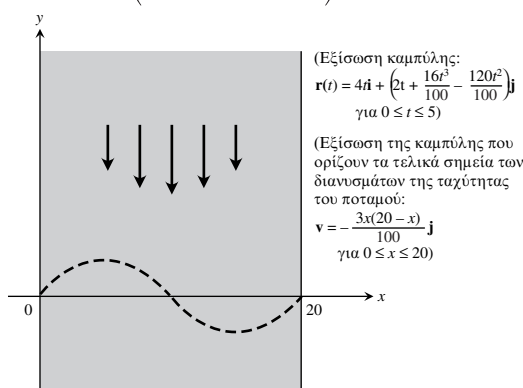
81. Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών περιελίξεων είναι σταθερή και ισούται με $2\pi a$.

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 9, σελ. 755

1. (α) $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(β) $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + \left(2t + \frac{16t^3}{100} - \frac{120t^2}{100} \right) \mathbf{j}$, όπου $0 \leq t \leq 5$

(γ)



3. $\frac{\pi}{2}$ για κάθε t

5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = 12$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = 26$

7. (α) $r = e^{2\theta}$

(β) $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$

9. $a^2 \left(\frac{3\pi}{2} - 4 \right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Ενότητα 10.1, σελ. 764–765

1. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (2, 3, 0) παράλληλα στον άξονα z

3. Ο άξονας x

5. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ στο επίπεδο $z = -2$

7. Ο κύκλος $y^2 + z^2 = 1$ στο επίπεδο yz

9. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ στο επίπεδο xy

11. (α) Το πρώτο τεταρτημόριο στο επίπεδο xy

(β) Το τέταρτο τεταρτημόριο στο επίπεδο xy

13. (α) Η σφαίρα με ακτίνα 1 και κέντρο στην αρχή

(β) Όλα τα σημεία που απέχουν από την αρχή περισσότερο από 1 μονάδα

15. (α) Το άνω ημισφαίριο με ακτίνα 1 και κέντρο στην αρχή των αξόνων

(β) Το στερεό άνω ημισφαίριο με ακτίνα 1 και κέντρο στην αρχή των αξόνων

17. (α) $x = 3$ (β) $y = -1$ (γ) $z = -2$

19. (α) $z = 1$ (β) $x = 3$ (γ) $y = -1$

21. (α) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $z = 0$

(β) $(y - 2)^2 + z^2 = 4$, $x = 0$

(γ) $x^2 + z^2 = 4$, $y = 2$

23. (α) $y = 3$, $z = -1$ (β) $x = 1$, $z = -1$ (γ) $x = 1$, $y = 3$

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 3$

27. $0 \leq z \leq 1$ 29. $z \leq 0$

31. (α) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 < 1$

(β) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 > 1$

33. $3 \left(\frac{2}{3} \mathbf{i} + \frac{1}{3} \mathbf{j} - \frac{2}{3} \mathbf{k} \right)$

35. $5(\mathbf{k})$

37. $\sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k} \right)$

39. (α) $2\mathbf{i}$ (β) $-\sqrt{3}\mathbf{k}$

(γ) $\frac{3}{10} \mathbf{j} + \frac{2}{5} \mathbf{k}$ (δ) $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

41. $\frac{7}{13} (12\mathbf{i} - 5\mathbf{k})$

43. (α) $5\sqrt{2}$

(β) $\frac{3}{5\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$

(γ) $(1/2, 3, 5/2)$

45. (α) $\sqrt{3}$

(β) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}$

(γ) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right)$

47. $A(4, -3, 5)$

49. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14$

51. $C(-2, 0, 2)$, $a = 2\sqrt{2}$

53. $C(-2, 0, 2)$, $a = 2\sqrt{2}$

55. $C \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$, $a = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

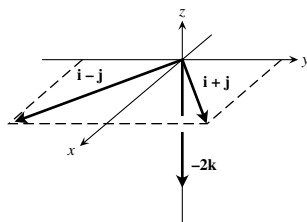
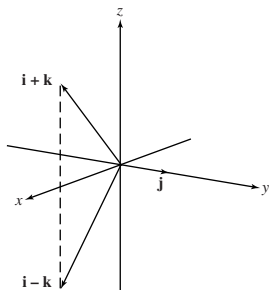
57. (α) $\sqrt{y^2 + z^2}$ (β) $\sqrt{x^2 + z^2}$ (γ) $\sqrt{x^2 + y^2}$

59. (α) $\frac{3}{2} \mathbf{i} + \frac{3}{2} \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (β) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (γ) $(2, 2, 1)$

Ενότητα 10.2, σελ. 774–776

1. (α) $-25, 5, 5$ (β) -1
(γ) -5 (δ) $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
3. (α) $25, 15, 5$ (β) $\frac{1}{3}$
(γ) $\frac{5}{3}$ (δ) $\frac{1}{9}(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
5. (α) $2, \sqrt{34}, \sqrt{3}$ (β) $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$
(γ) $\frac{2}{\sqrt{34}}$ (δ) $\frac{1}{17}(5\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$
7. $\left(\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}\right) + \left(-\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\right)$
9. $\left(\frac{14}{3}\mathbf{i} + \frac{28}{3}\mathbf{j} - \frac{14}{3}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{10}{3}\mathbf{i} - \frac{16}{3}\mathbf{j} - \frac{22}{3}\mathbf{k}\right)$
11. $0,75 \text{ rad}$ 13. $1,77 \text{ rad}$

17. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3$, η κατεύθυνση είναι $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3$, η κατεύθυνση είναι $-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$
19. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0$, δεν υπάρχει κατεύθυνση.
 $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 0$, δεν υπάρχει κατεύθυνση
21. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6$, η κατεύθυνση είναι $-\mathbf{k}$.
 $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6$, η κατεύθυνση είναι $\mathbf{k}$
23. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6\sqrt{5}$, η κατεύθυνση είναι $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$.
 $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6\sqrt{5}$, η κατεύθυνση είναι $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$
25. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ 27. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -2\mathbf{k}$



29. (α) $2\sqrt{6}$ (β) $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
31. (α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (β) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
33. 8 35. 7
37. (α) Κανένα (β) $\mathbf{u}$ και $\mathbf{w}$
39. $22,52 \text{ Nm}$
41. (α) Αληθές (β) Όχι πάντοτε αληθές
(γ) Αληθές (δ) Αληθές
(ε) Όχι πάντοτε αληθές (στ) Αληθές
(ζ) Αληθές (η) Αληθές
43. (α) $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$ (β) $\pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
(γ) $\pm(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ (δ) $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$
45. (α) Ναι (β) Όχι (γ) Ναι (δ) Όχι
47. Όχι, το $\mathbf{v}$ δεν οφείλει να ισούται με το $\mathbf{w}$. Για παράδειγμα, $\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ενώ $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$ και $\mathbf{i} \times (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$.
49. 2 51. 13

53. $\frac{11}{2}$

55. $\frac{25}{2}$

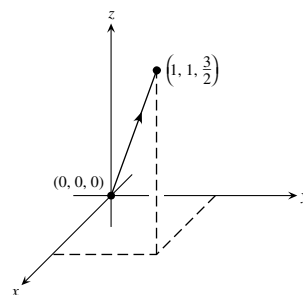
57. Αν $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ και $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, τότε $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$

και το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\frac{1}{2} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

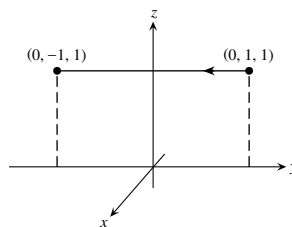
Το σωστό πρόσημο είναι (+) αν η οξεία γωνία από το $\mathbf{u}$ στο $\mathbf{v}$ διαγράφεται αριστερόστροφα στο επίπεδο xy και (-) αν διαγράφεται δεξιόστροφα.

Ενότητα 10.3, σελ. 782–784

1. Διανυσματική μορφή: $\mathbf{r}(t) = (3 + t)\mathbf{i} + (t - 4)\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}$
Παραμετρική μορφή: $x = 3 + t, y = -4 + t, z = -1 + t$
3. Διανυσματική μορφή: $\mathbf{r}(t) = (5t - 2)\mathbf{i} + (5t)\mathbf{j} + (3 - 5t)\mathbf{k}$
Παραμετρική μορφή: $x = -2 + 5t, y = 5t, z = 3 - 5t$
5. Διανυσματική μορφή: $\mathbf{r}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} - (t + 2)\mathbf{j} + (3t + 1)\mathbf{k}$
Παραμετρική μορφή: $x = 3 + 2t, y = -2 - t, z = 1 + 3t$
7. Διανυσματική μορφή: $\mathbf{r}(t) = (3t + 2)\mathbf{i} + (7t + 4)\mathbf{j} + (5 - 5t)\mathbf{k}$
Παραμετρική μορφή: $x = 2 + 3t, y = 4 + 7t, z = 5 - 5t$
9. Διανυσματική μορφή: $\mathbf{r}(t) = (2 - 2t)\mathbf{i} + (4t + 3)\mathbf{j} - (2t)\mathbf{k}$
Παραμετρική μορφή: $x = 2 - 2t, y = 3 + 4t, z = -2t$
11. $x = t, y = t, z = \frac{3}{2}t, 0 \leq t \leq 1$



13. $x = 0, y = 1 - 2t, z = 1, 0 \leq t \leq 1$



15. $3x - 2y - z = -3$ 17. $7x - 5y - 4z = 6$
19. $x + 3y + 4z = 34$
21. $(1, 2, 3), -20x + 12y + z = 7$
23. $y + z = 3$ 25. $x - y + z = 0$
29. 0 33. $19/5$
35. $9/\sqrt{41}$ 39. $0,82 \text{ rad}$
41. $(3/2, -3/2, 1/2)$ 43. $(1, 1, 0)$
45. $x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1$
47. $x = 4, y = 3 + 6t, z = 1 + 3t$

49. Η $L1$ τέμνει την $L2$ · η $L2$ είναι παράλληλη με την $L3$ · οι $L1$ και $L3$ είναι ασύμβατες.
51. $x = 2 + 2t, y = -4 - t, z = 7 + 3t$
 $x = -2 - t, y = -2 + (1/2)t, z = 1 - (3/2)t$
53. $(0, -1/2, -3/2), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$
55. Η ευθεία δεν είναι παράλληλη με το επίπεδο.
57. Πολλές απαντήσεις είναι δυνατές. Μία από αυτές είναι $x + y = 3$ και $2y + z = 7$.
59. Η $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ περιγράφει όλα τα επίπεδα εκτός από αυτά που διέρχονται από την αρχή ή είναι παράλληλα με κάποιον από τους άξονες συντεταγμένων.

Ενότητα 10.4, σελ. 793–794

- Γράφημα (δ), ελλειψοειδές
 - Γράφημα (α), κύλινδρος
 - Γράφημα (ιβ), υπερβολικό παραβολοειδές
 - Γράφημα (β), κύλινδρος
 - Γράφημα (ια), υπερβολικό παραβολοειδές
 - Γράφημα (η), κώνος
13. (α) $\frac{2\pi(9-c^2)}{9}$ (β) 8π (γ) $\frac{4\pi abc}{3}$

Ενότητα 10.5, σελ. 804–806

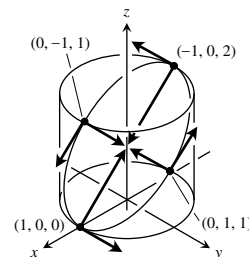
- $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$: μέτρο ταχύτητας:
 3 : κατεύθυνση: $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(1) = 3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$
- $\mathbf{v} = (-2 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
 $\mathbf{a} = (-2 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j}$
μέτρο ταχύτητας: $2\sqrt{5}$
κατεύθυνση: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{k}$
 $\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{5}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{k}\right]$
- $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{a} = \left(\frac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
μέτρο ταχύτητας: $\sqrt{6}$
κατεύθυνση: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$
 $\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$
- $\pi/2$ 9. $\pi/2$
- $t = 0, \pi, 2\pi$ 13. $\left(\frac{1}{4}\right)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \left(\frac{3}{2}\right)\mathbf{k}$
- $\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- $(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\mathbf{i} + (-e^{-t} + 1)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$
- $x = t, y = -1, z = 1 + t$
- $x = at, y = a, z = 2\pi b + bt$
- $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2\right)\mathbf{j} +$

$$\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right)\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

31. $\max |\mathbf{v}| = 2, \min |\mathbf{v}| = 0, \max |\mathbf{a}| = \min |\mathbf{a}| = 1$
33. $\max |\mathbf{v}| = 3, \min |\mathbf{v}| = 2, \max |\mathbf{a}| = 3, \min |\mathbf{a}| = 2$

Ενότητα 10.6, σελ. 815

- $\mathbf{T} = \left(-\frac{2}{3} \sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3} \cos t\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}, 3\pi$
- $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}, \frac{52}{3}$
- $\mathbf{T} = (-\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \frac{3}{2}$
- $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - t \sin t}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sin t + t \cos t}{t+1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1}\right)\mathbf{k}, \frac{\pi^2}{2} + \pi$
- $(0, 5, 24\pi)$ 11. $s(t) = 5t, L = \frac{5\pi}{2}$
- $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$
- $\mathbf{T} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}, \mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}, \kappa = \cos t$
- $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, \mathbf{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, \kappa = \frac{1}{2(\sqrt{1+t^2})^3}$
- $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
- (α) Ο κύλινδρος είναι ο $x^2 + y^2 = 1$, το επίπεδο είναι το $x + z = 1$.
(β) και (γ)



- (δ) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$ (ε) $L \approx 7,64$
23. $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

Ενότητα 10.7, σελ. 823–825

- $\mathbf{T} = \frac{3 \cos t}{5}\mathbf{i} - \frac{3 \sin t}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}, \mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}, \mathbf{B} = \left(\frac{4}{5} \cos t\right)\mathbf{i} - \left(\frac{4}{5} \sin t\right)\mathbf{j} - \frac{3}{4}\mathbf{k}, \kappa = \frac{3}{25}, \tau = -\frac{4}{25}$
- $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}, \mathbf{N} = \left(\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}, \mathbf{B} = \mathbf{k}, \kappa = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}, \tau = 0$
- $\mathbf{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j}, \mathbf{N} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}},$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{k}, \kappa = \frac{1}{t(t^2 + 1)^{3/2}}, \tau = 0$$

$$7. \mathbf{T} = \left(\operatorname{sech} \frac{t}{a} \right) \mathbf{i} + \left(\tanh \frac{t}{a} \right) \mathbf{j}, \mathbf{N} = \left(-\tanh \frac{t}{a} \right) \mathbf{i} + \left(\operatorname{sech} \frac{t}{a} \right) \mathbf{j},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}, \kappa = \frac{1}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{a}, \tau = 0 \quad 9. \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{N}$$

$$11. \mathbf{a}(1) = \frac{4}{3} \mathbf{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3} \mathbf{N} \quad 13. \mathbf{a}(0) = 2\mathbf{N}$$

$$15. \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}, \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{k}.$$

επίπεδο καμπυλότητας (συνεφαπτόμενο επίπεδο):
 $z = -1$ κάθετο επίπεδο: $-x + y = 0$
 ανορθωτικό επίπεδο: $x + y = \sqrt{2}$

$$17. \text{Ναι. Αν το όχημα κινείται στην καμπύλη τροχιά (\(\kappa \neq 0\)), τότε } a_N = \kappa |\mathbf{v}|^2 \neq 0 \text{ και } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

$$21. |\mathbf{F}| = \kappa \left[m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] \quad 23. (\beta) \cos x$$

$$25. (\beta) \mathbf{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}} \mathbf{j}$$

$$(\gamma) \mathbf{N} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{4-t^2} \mathbf{i} + t \mathbf{j} \right)$$

$$29. \frac{1}{2b}$$

$$33. (\alpha) b - a$$

$$(\beta) \pi$$

$$37. \kappa = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

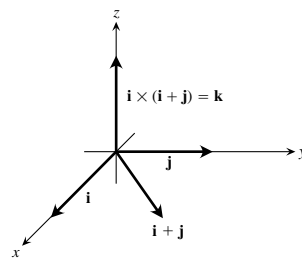
$$39. \kappa = \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$$

Ενότητα 10.8, σελ. 833-834

1. $T = 93,2 \text{ min}$
5. $D = 6480 \text{ km}$
7. (α) 42.167 km (β) 35.788 km
 (γ) *Syncom 3, GOES 4, και Intelsat 5*
9. $a = 383.200 \text{ km}$ από το κέντρο της Γης, δηλ. περίπου 376.821 km από την επιφάνειά της

Ασκήσεις Κεφαλαίου 10, σελ. 836-838

1. Μήκος = 7, η κατεύθυνση είναι $\frac{2}{7} \mathbf{i} - \frac{3}{7} \mathbf{j} + \frac{6}{7} \mathbf{k}$.
3. $\frac{8}{\sqrt{33}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{33}} \mathbf{j} + \frac{8}{\sqrt{33}} \mathbf{k}$
5. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}, |\mathbf{u}| = 3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3, \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$
 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, |\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3, \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4},$
 $|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{2}}, \operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{3}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j})$
7. $\frac{4}{3} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) - \frac{1}{3} (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 11\mathbf{k})$
9. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k}$



$$11. 2\sqrt{7}$$

$$13. (\alpha) \sqrt{14}$$

$$(\beta) 1$$

$$17. x = 1 - 3t, y = 2, z = 3 + 7t \quad 19. 2x + y + z = 5$$

$$21. -9x + y + 7z = 4$$

$$23. (0, -1/2, -3/2), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$$

$$25. \frac{\pi}{3}$$

$$29. 7x - 3y - 5z = -14$$

$$31. \frac{1}{\sqrt{14}} (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$33. (4/3, -2/3, -2/3)$$

$$35. (\alpha) \text{ Όχι}$$

$$(\beta) \text{ Όχι}$$

$$(\gamma) \text{ Όχι}$$

$$(\delta) \text{ Όχι}$$

$$(\epsilon) \text{ Ναι}$$

$$37. \sqrt{78/3}$$

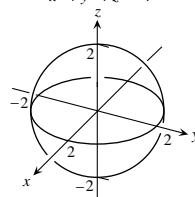
$$39. \sqrt{2}$$

$$41. 3$$

$$43. 11/\sqrt{107}$$

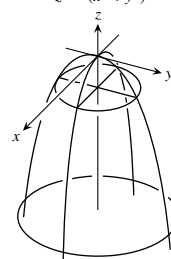
$$45.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$



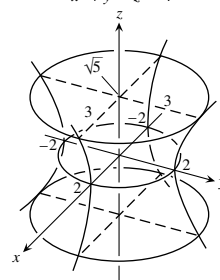
$$47.$$

$$z = -(x^2 + y^2)$$



$$49.$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4$$



$$51. \text{Μήκος} = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} + \ln \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} \right)$$

$$53. \mathbf{T}(0) = \frac{2}{3} \mathbf{i} - \frac{2}{3} \mathbf{j} + \frac{1}{3} \mathbf{k}, \mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \mathbf{k}, \kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}, \tau = \frac{1}{6}$$

$$55. \mathbf{T}(\ln 2) = \frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{j}, \mathbf{N}(\ln 2) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{B}(\ln 2) = \mathbf{k}, \kappa = \frac{8}{17\sqrt{17}}, \tau = 0$$

$$57. \mathbf{a}(0) = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$$

$$59. \mathbf{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) \mathbf{i} - (\sin t) \mathbf{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \mathbf{i} - (\cos t) \mathbf{j} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}, \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau = 0$$

$$61. \pi/3$$

$$63. x = 1 + t, y = t, z = -t$$

65. 5971 km, $1,639 \times 10^7 \text{ km}^2$, 3,21% της επιφάνειας ορατό

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 10, σελ. 838–840

1. (26, 23, -1/3) 3. $|\mathbf{F}| = 85 \text{ N}$
 9. (β) $6/\sqrt{14}$
 15. $\frac{32}{41} \mathbf{i} + \frac{23}{41} \mathbf{j} - \frac{13}{41} \mathbf{k}$
 17. (α) $|\mathbf{F}| = \frac{GMm}{d^2} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{2}{(i^2 + 1)^{3/2}} \right)$
 (β) Ναι
 21. (α) $\frac{dx}{dt} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \frac{dy}{dt} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$
 (β) $\frac{dr}{dt} = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta, r \frac{d\theta}{dt} = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta$
 23. (α) $\mathbf{v}(1) = -\mathbf{u}_r + 3\mathbf{u}_\theta, \mathbf{a}(1) = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta$
 (β) 6,5 cm.

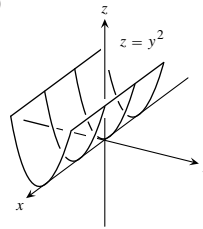
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Ενότητα 11.1, σελ. 848–850

1. (α) Όλα τα σημεία του επιπέδου xy (β) Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί
 (γ) Οι ευθείες $y - x = c$ (δ) Δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία
 (ε) Ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό
 3. (α) Όλα τα σημεία του επιπέδου xy (β) $z \geq 0$
 (γ) Για $f(x, y) = 0$, η αρχή των αξόνων· για $f(x, y) \neq 0$, ελλείψεις με κέντρο το $(0, 0)$, και μεγάλο και μικρό ημιάξονα κατά μήκος των αξόνων x και y , αντίστοιχα
 (δ) Δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία (ε) Ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό
 (στ) Μη φραγμένο
 5. (α) Όλα τα σημεία του επιπέδου xy (β) Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί
 (γ) Για $f(x, y) = 0$, οι άξονες x και y · για $f(x, y) \neq 0$, υπερβολές με ασύμπτωτες τους άξονες x και y .
 (δ) Δεν υπάρχουν συνοριακά σημεία (ε) Ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό
 (στ) Μη φραγμένο
 7. (α) Όλα τα (x, y) που ικανοποιούν την ανισότητα $x^2 + y^2 < 16$ (β) $z \geq \frac{1}{4}$
 (γ) Κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες $r < 4$
 (δ) Σύνορο είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$
 (ε) Ανοιχτό (στ) Φραγμένο
 9. (α) $(x, y) \neq (0, 0)$ (β) Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί
 (γ) Κύκλοι με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνες $r > 0$
 (δ) Σύνορο είναι το σημείο $(0, 0)$
 (ε) Ανοιχτό (στ) Μη φραγμένο
 11. (α) Όλα τα (x, y) που ικανοποιούν την ανισότητα $-1 \leq y - x \leq 1$
 (β) $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$
 (γ) Ευθείες της μορφής $y - x = c$, όπου $-1 \leq c \leq 1$
 (δ) Σύνορο είναι οι δύο ευθείες $y = 1 + x$ και $y = -1 + x$.
 (ε) Κλειστό (στ) Μη φραγμένο

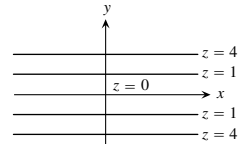
13. Γράφημα (στ)

19. (α)

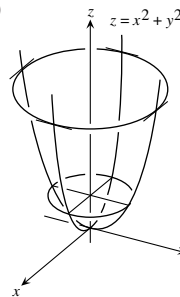


15. Γράφημα (α)

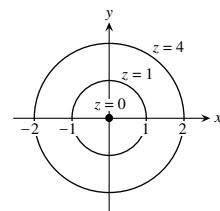
(β)



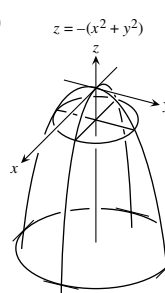
21. (α)



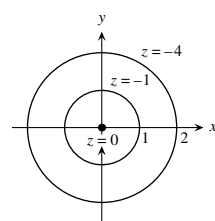
(β)



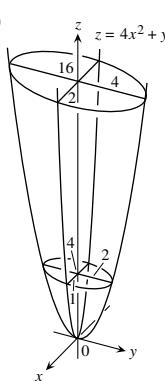
23. (α)



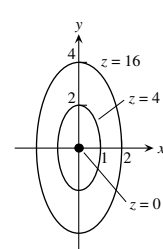
(β)



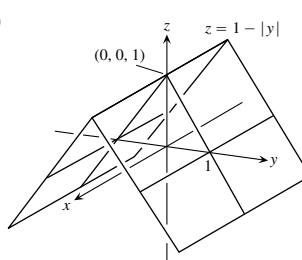
25. (α)



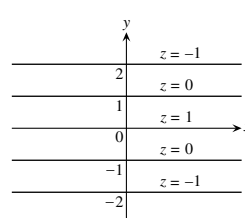
(β)



27. (α)



(β)



29. $x^2 + y^2 = 10$

31. $\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = 2 \tan^{-1} \sqrt{2}$

49. $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4, \frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3,$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$$

51. (α) Πρώτα το x (β) Πρώτα το y (γ) Πρώτα το x
(δ) Πρώτα το x (ε) Πρώτα το y (στ) Πρώτα το y

53. $f_x(1, 2) = -13, f_y(1, 2) = -2$

55. 12 57. -2

59. $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc \sin A}, \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{c \cos A - b}{bc \sin A}$

61. $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$ 77. Ναι

Ενότητα 11.4, σελ. 876-878

1. (α) $\frac{dw}{dt} = 0,$ (β) $\frac{dw}{dt}(\pi) = 0$

3. (α) $\frac{dw}{dt} = 1,$ (β) $\frac{dw}{dt}(3) = 1$

5. (α) $\frac{dw}{dt} = 4t \tan^{-1} t + 1,$ (β) $\frac{dw}{dt}(1) = \pi + 1$

7. (α) $\frac{\partial z}{\partial u} = 4 \cos v \ln(u \sin v) + 4 \cos v, \frac{\partial z}{\partial v} =$
 $-4u \sin v \ln(u \sin v) + \frac{4u \cos^2 v}{\sin v}$

(β) $\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2}(\ln 2 + 2), \frac{\partial z}{\partial v} = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$

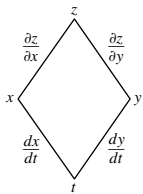
9. (α) $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv, \frac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$

(β) $\frac{\partial w}{\partial u} = 3, \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$

11. (α) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z-y)^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z-y)^2}$

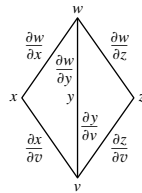
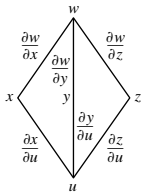
(β) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = -2$

13. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

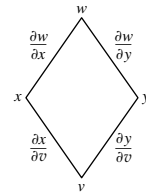
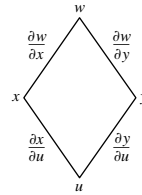


15. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$

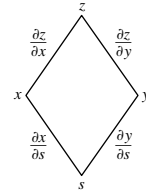
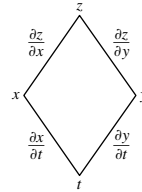
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$



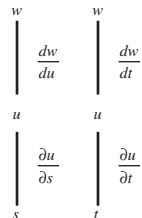
17. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$



19. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$

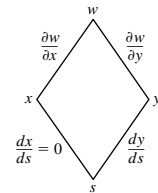
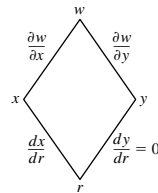


21. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial t}$



23. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr}$ εφόσον $\frac{dy}{dr} = 0,$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$
 εφόσον $\frac{dx}{ds} = 0$



25. 4/3

27. -4/5

29. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1$

33. 12

35. -7

37. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2, \frac{\partial z}{\partial v} = 1$

39. -0,00005 A/sec

45. $(\cos 1, \sin 1, 1)$ και $(\cos(-2), \sin(-2), -2)$

47. (α) Μέγιστη θερμοκρασία στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και

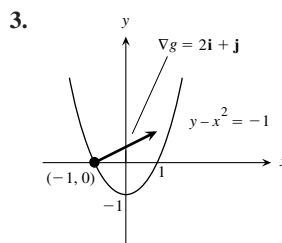
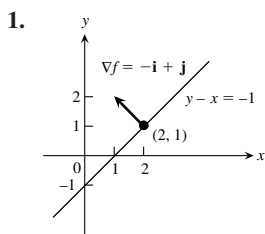
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \text{ελάχιστη θερμοκρασία στο}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

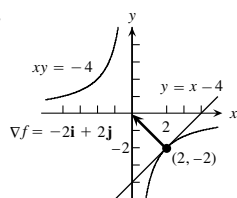
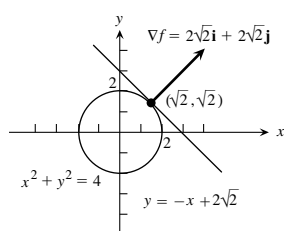
(β) Μέγιστη θερμοκρασία = 6, ελάχιστη θερμοκρασία = 2

49. $2x\sqrt{x^8 + x^3} + \int_0^{x^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{t^4 + x^3}} dt$

Ενότητα 11.5, σελ. 890-892



5. $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 7. $\nabla f = -\frac{26}{27}\mathbf{i} + \frac{23}{54}\mathbf{j} - \frac{23}{54}\mathbf{k}$
9. -4 11. 31/13
13. 3 15. 2
17. $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = \sqrt{2}$, $-\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$
19. $\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 3\sqrt{3}$, $-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$
21. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 2\sqrt{3}$, $-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$
23. $df = \frac{9}{11.830} \approx 0,0008$ 25. $dg = 0$
27. (α) $x + y + z = 3$
(β) $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 2t$
29. (α) $2x - z - 2 = 0$
(β) $x = 2 - 4t$, $y = 0$, $z = 2 + 2t$
31. (α) $2x + 2y + z - 4 = 0$
(β) $x = 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + t$
33. (α) $x + y + z - 1 = 0$
(β) $x = t$, $y = 1 + t$, $z = t$
35. $2x - z - 2 = 0$ 37. $x - y + 2z - 1 = 0$
- 39.



43. $x = 1$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 2t$
45. $x = 1 - 2t$, $y = 1$, $z = \frac{1}{2} + 2t$
47. $x = 1 + 90t$, $y = 1 - 90t$, $z = 3$
49. $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$, $-\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$
51. Όχι, ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής είναι $\sqrt{185} < 14$.
53. $-\frac{7}{\sqrt{5}}$
55. (α) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{3} \approx 0,935^\circ\text{C/m}$
(β) $\sqrt{3} \sin \sqrt{3} - \cos \sqrt{3} \approx 1,87^\circ\text{C/sec}$
57. Στο $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ στο 0, 0· στο $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Ενότητα 11.6, σελ. 901-903

1. (α) $L(x, y) = 1$ (β) $L(x, y) = 2x + 2y - 1$
3. (α) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$ (β) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$
5. (α) $L(x, y) = 1 + x$ (β) $L(x, y) = -y + \frac{\pi}{2}$
7. $L(x, y) = 7 + x - 6y$, 0,06 9. $L(x, y) = x + y + 1$, 0,08
11. $L(x, y) = 1 + x$, 0,0222
13. Μας ενδιαφέρει περισσότερο η μικρότερη διάσταση από τις δύο. Αυτή θα παραγάγει τη μεγαλύτερη μερική παράγωγο.
15. Μέγιστο σφάλμα (κατ' εκτίμηση) $\leq 0,31$ κατά μέτρο
17. Μέγιστο ποσοστιαίο σφάλμα $= \pm 4,83\%$
19. $|x - 1| \leq 0,014$, $|y - 1| \leq 0,014$
21. $\approx 0,1\%$
23. (α) $L(x, y, z) = 2x + 2y + 2z - 3$
(β) $L(x, y, z) = y + z$
(γ) $L(x, y, z) = 0$
25. (α) $L(x, y, z) = x$
(β) $L(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$
(γ) $L(x, y, z) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$
27. (α) $L(x, y, z) = 2 + x$
(β) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$
(γ) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$
29. $L(x, y, z) = 2x - 6y - 2z + 6$, 0,0024
31. $L(x, y, z) = x + y - z - 1$, 0,00135
33. (α) $S_0 \left(\frac{1}{100} dp + dx - 5 dw - 30 dh \right)$
(β) Περισσότερη ευαισθησία σε μεταβολή του ύψους
35. Η f είναι περισσότερο ευαίσθητη σε μεταβολή του d
37. $\approx 0,055 \text{ m}^3$
39. Μέγεθος πιθανού σφάλματος $\leq 4,8$

Ενότητα 11.7, σελ. 911-914

1. $f(-3, 3) = -5$, τοπικό ελάχιστο
3. $f(-2, 1)$, σαγματικό σημείο
5. $f\left(\frac{13}{12}, -\frac{3}{4}\right) = -\frac{31}{12}$, τοπικό ελάχιστο
7. $f(1, 2)$, σαγματικό σημείο
9. $f(0, 1) = 4$, τοπικό μέγιστο
11. $f(0, 0)$, σαγματικό σημείο· $f(-1, -1) = 1$, τοπικό μέγιστο
13. $f(0, 0)$, σαγματικό σημείο· $f\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{81}$, τοπικό ελάχιστο
15. $f(0, 0)$, σαγματικό σημείο· $f(1, 1) = 2$, $f(-1, -1) = 2$, τοπικά μέγιστα
17. $f(0, 0) = -1$, τοπικό μέγιστο
19. $f(n\pi, 0)$, σαγματικό σημείο· $f(n\pi, 0) = 0$ για κάθε n
21. Ολικό μέγιστο: 1 στο $(0, 0)$ · ολικό ελάχιστο: -5 στο $(1, 2)$
23. Ολικό μέγιστο: 11 στο $(0, -3)$ · ολικό ελάχιστο: -10 στο $(4, -2)$
25. Ολικό μέγιστο: 4 στο $(2, 0)$ · ολικό ελάχιστο: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ στα $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, και $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

27. $a = -3, b = 2$

29. Μέγιστη θερμοκρασία: $2\frac{1}{4}$ στο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ελάχιστη θερμοκρασία: $-\frac{1}{4}$ στο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

31. (α) $f(0, 0)$, σαγματικό σημείο

(β) $f(1, 2)$, τοπικό ελάχιστο

(γ) $f(1, -2)$, τοπικό ελάχιστο· $f(-1, -2)$, σαγματικό σημείο

37. $(1/6, 1/3, 355/36)$

41. (α) Στο ημικύκλιο, $\max f = 2\sqrt{2}$ για $t = \frac{\pi}{4}$, $\min f = -2$

για $t = \pi$ · στο τεταρτοκύκλιο, $\max f = 2\sqrt{2}$ για $t =$

$\frac{\pi}{4}$, $\min f = 2$ για $t = 0, \frac{\pi}{2}$

(β) Στο ημικύκλιο, $\max g = 2$ για $t = \frac{\pi}{4}$, $\min g = -2$ για

$t = \frac{3\pi}{4}$ · στο τεταρτοκύκλιο, $\max g = 2$ για $t = \frac{\pi}{4}$,

$\min g = 0$ για $t = 0, \frac{\pi}{2}$

(γ) Στο ημικύκλιο, $\max h = 8$ για $t = 0, \pi$ · $\min h = 4$

για $t = \frac{\pi}{2}$ · στο τεταρτοκύκλιο, $\max h = 8$ για $t = 0,$

$\min h = 4$ για $t = \frac{\pi}{2}$

43. (i) $\min f = -\frac{1}{2}$ για $t = -\frac{1}{2}$ · δεν υπάρχει μέγιστο

(ii) $\max f = 0$ για $t = -1, 0$ · $\min f = -\frac{1}{2}$ για $t = -\frac{1}{2}$

(iii) $\max f = 4$ για $t = 1$ · $\min f = 0$ για $t = 0$

Ενότητα 11.8, σελ. 923–925

1. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$

3. 39

5. $(3, \pm 3\sqrt{2})$

7. (α) 8

(β) 64

9. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm

11. $\ell = 4\sqrt{2}$, $w = 3\sqrt{2}$

13. Ελάχιστη τιμή $f(0, 0) = 0$, μέγιστη τιμή $f(2, 4) = 20$

15. Ελάχιστη θερμοκρασία $= 0^\circ$, μέγιστη θερμοκρασία $= 125^\circ$

17. $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

19. 1

21. $(0, 0, 2), (0, 0, -2)$

23. Μέγιστη τιμή $f(1, -2, 5) = 30$, ελάχιστη τιμή $f(-1, 2, -5) = -30$.

25. 3, 3, 3

27. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ επί $\frac{2}{\sqrt{3}}$ επί $\frac{2}{\sqrt{3}}$ μονάδες

29. $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$

31. $U(8, 14) = 128$

33. $f(2/3, 4/3, -4/3) = \frac{4}{3}$

35. $(2, 4, 4)$

37. Το μέγιστο είναι $1 + 6\sqrt{3}$ και προκύπτει στα σημεία $(\pm\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1)$, το ελάχιστο είναι $1 - 6\sqrt{3}$ και προκύπτει στα σημεία $(\pm\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1)$.

39. Το μέγιστο είναι 4 και προκύπτει στα σημεία $(0, 0, \pm 2)$, το ελάχιστο είναι 2 και προκύπτει στα σημεία $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$

Ενότητα 11.9, σελ. 929–930

1. (α) 0

(β) $1 + 2z$

(γ) $1 + 2z$

3. (α) $\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial T} \left(\frac{V}{nR} \right)$

(β) $\frac{\partial U}{\partial P} \left(\frac{nR}{V} \right) + \frac{\partial U}{\partial T}$

5. (α) 5

(β) 5

7. $\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_\theta = \cos \theta$

$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ενότητα 11.10, σελ. 934

1. Δευτεροβάθμια: $x + xy$ · τριτοβάθμια: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$

3. Δευτεροβάθμια: xy · τριτοβάθμια: xy

5. Δευτεροβάθμια: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$ ·

τριτοβάθμια: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$

7. Δευτεροβάθμια: $\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2$ · τριτοβάθμια: $x^2 + y^2$

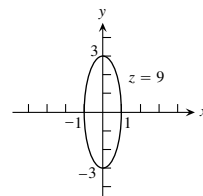
9. Δευτεροβάθμια: $1 + (x + y) + (x + y)^2$ ·

τριτοβάθμια: $1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3$

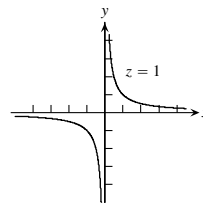
11. Δευτεροβάθμια: $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ · $E(x, y) \leq 0,00134$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 11, σελ. 936–939

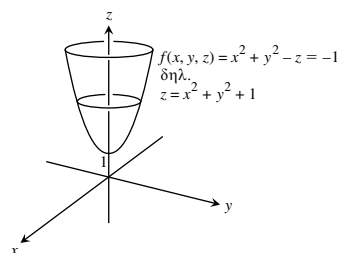
1. Πεδίο ορισμού: όλα τα σημεία του επιπέδου xy · πεδίο τιμών: $z \geq 0$. Οι ισοσταθμικές καμπύλες είναι ελλείψεις με τον μεγάλο ημιάξονα κατά μήκος του άξονα y και τον μικρό ημιάξονα κατά μήκος του άξονα x .



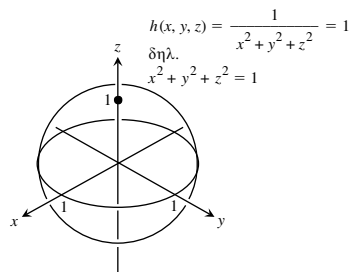
3. Πεδίο ορισμού: όλα τα (x, y) τέτοια ώστε $x \neq 0$ και $y \neq 0$ · πεδίο τιμών: $z \neq 0$. Οι ισοσταθμικές καμπύλες είναι υπερβολές με ασύμπτωτες τους άξονες x και y .



5. Πεδίο ορισμού: όλα τα σημεία του χώρου xyz · πεδίο τιμών: όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Οι ισοσταθμικές επιφάνειες είναι παραβολοειδή εκ περιστροφής με άξονα τον άξονα z .



7. Πεδίο ορισμού: όλα τα (x, y, z) τέτοια ώστε $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$: πεδίο τιμών: οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Οι ισοσταθμικές επιφάνειες είναι σφαίρες με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $r > 0$.



9. -2
11. 1/2
13. 1
15. Έστω $y = kx^2, k \neq 1$
17. Όχι· το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

19. $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta + \sin \theta, \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta + r \cos \theta$

21. $\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}, \frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}, \frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$

23. $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}, \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}, \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}, \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$

25. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}$

27. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

29. $\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = -1$

31. $\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2, \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2 - \pi$

33. $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=1} = -(\sin 1 + \cos 2)(\sin 1) + (\cos 1 + \cos 2)(\cos 1) - 2(\sin 1 + \cos 1)(\sin 2)$

35. $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$

37. Η πλέον απότομη αύξηση στην κατεύθυνση $\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}$.

η πλέον απότομη μείωση στην κατεύθυνση

$$-\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}, D_{\mathbf{u}} f = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$D_{-\mathbf{u}} f = -\frac{\sqrt{2}}{2}, D_{\mathbf{u}_1} f = -\frac{7}{10} \text{ όπου } \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

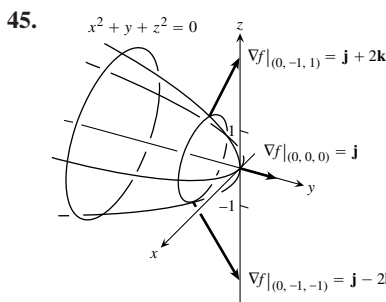
39. Η πλέον απότομη αύξηση στην κατεύθυνση $\mathbf{u} = \frac{2}{7} \mathbf{i} + \frac{3}{7} \mathbf{j} + \frac{6}{7} \mathbf{k}$.

η πλέον απότομη μείωση στην κατεύθυνση $-\mathbf{u} = -\frac{2}{7} \mathbf{i} - \frac{3}{7} \mathbf{j} - \frac{6}{7} \mathbf{k}, D_{\mathbf{u}} f = 7$.

$$D_{-\mathbf{u}} f = -7 \cdot D_{\mathbf{u}_1} f = 7 \text{ όπου } \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

41. $\pi/\sqrt{2}$

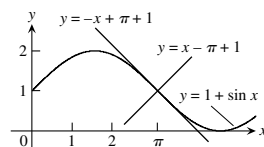
43. (α) $f_x(1, 2) = f_y(1, 2) = 2$ (β) 14/5



47. Εφαπτομένη: $4x - y - 5z = 4$ · κάθετη ευθεία: $x = 2 + 4t, y = -1 - t, z = 1 - 5t$

49. $2y - z - 2 = 0$

51. Εφαπτομένη: $x + y = \pi + 1$ · κάθετη ευθεία: $y = x - \pi + 1$



53. $x = 1 - 2t, y = 1, z = 1/2 + 2t$

55. Οι απαντήσεις εξαρτώνται από το άνω φράγμα που χρησιμοποιήθηκε για τις $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$. Για $M = \sqrt{2}/2, |E| \leq 0,0142$. Για $M = 1, |E| \leq 0,02$.

57. $L(x, y, z) = y - 3z, L(x, y, z) = x + y - z - 1$

59. Θα πρέπει να είμαστε περισσότερο προσεκτικοί με τη διάμετρο.

61. $dI = 0,038$, ποσοστιαία μεταβολή στο $I = 15,83\%$, περισσότερο ευαισθησία στη μεταβολή της τάσεως

63. (α) 5%

65. Τοπικό ελάχιστο -8 στο $(-2, -2)$

67. Σαγματικό σημείο στο $(0, 0), f(0, 0) = 0$ · τοπικό μέγιστο 1/4 στο $(-1/2, -1/2)$

69. Σαγματικό σημείο στο $(0, 0), f(0, 0) = 0$ · τοπικό ελάχιστο -4 στο $(0, 2)$ · τοπικό μέγιστο 4 στο $(-2, 0)$ · σαγματικό σημείο στο $(-2, 2), f(-2, 2) = 0$

71. Ολικό μέγιστο: 28 στο $(0, 4)$ · ολικό ελάχιστο: -9/4 στο $(3/2, 0)$

73. Ολικό μέγιστο: 18 στο $(2, -2)$ · ολικό ελάχιστο: -17/4 στο $(-2, 1/2)$

75. Ολικό μέγιστο: 8 στο $(-2, 0)$ · ολικό ελάχιστο: -1 στο $(1, 0)$

77. Ολικό μέγιστο: 4 στο $(1, 0)$ · ολικό ελάχιστο: -4 στο $(0, -1)$

79. Ολικό μέγιστο: 1 στα $(0, \pm 1)$ και $(1, 0)$ · ολικό ελάχιστο: -1 στο $(-1, 0)$

81. Μέγιστο: 5 στο $(0, 1)$ · ελάχιστο: -1/3 στο $(0, -1/3)$

83. Μέγιστο: $\sqrt{3}$ στο $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

ελάχιστο: $-\sqrt{3}$ στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

85. Πλάτος: $\left(\frac{c^2V}{ab}\right)^{1/3}$, βάθος: $\left(\frac{b^2V}{ac}\right)^{1/3}$, ύψος: $\left(\frac{a^2V}{bc}\right)^{1/3}$

87. Μέγιστο: $\frac{3}{2}$ στα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ και

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$.

ελάχιστο: $\frac{1}{2}$ στα $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ και

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

89. (α) $(2y + x^2z)e^{yz}$

(β) $x^2 e^{yz} \left(y - \frac{z}{2y}\right)$

(γ) $(1 + x^2y)e^{yz}$

91. $\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$

97. $(t, -t \pm 4, t)$, t πραγματικός αριθμός

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 11, σελ. 939–942

1. $f_{xy}(0, 0) = -1, f_{yx}(0, 0) = 1$

7. (γ) $\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ 13. $V = \frac{\sqrt{3}abc}{2}$

17. $f(x, y) = \frac{y}{2} + 4, g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$

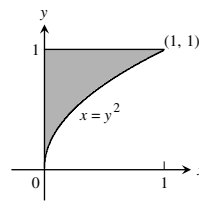
19. $y = 2 \ln |\sin x| + \ln 2$

21. (α) $\frac{1}{\sqrt{53}}(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j})$

(β) $\frac{-1}{\sqrt{29,097}}(98\mathbf{i} - 127\mathbf{j} + 58\mathbf{k})$

23. $w = e^{-c^2\pi^2t} \sin \pi x$

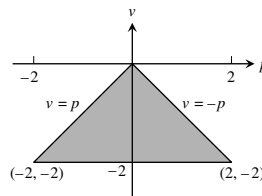
9. $e - 2$



11. $\frac{3}{2} \ln 2$

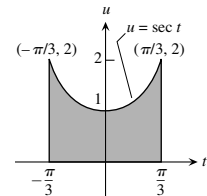
13. $1/6$

17. 8

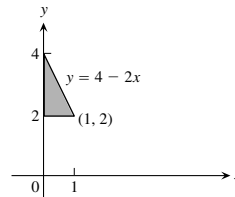


15. $-1/10$

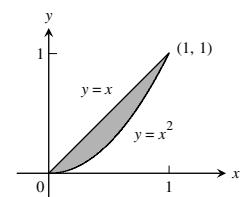
19. 2π



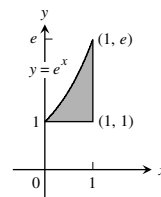
21. $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx dy$



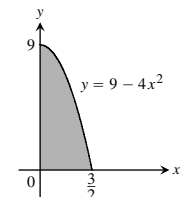
23. $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$



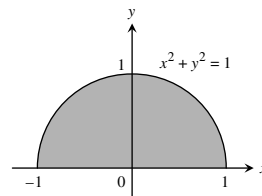
25. $\int_1^e \int_{\ln y}^1 dx dy$



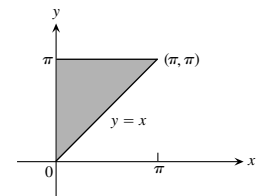
27. $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x dx dy$



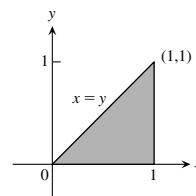
29. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y dy dx$



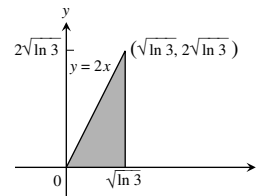
31. 2



33. $\frac{e-2}{2}$



35. 2



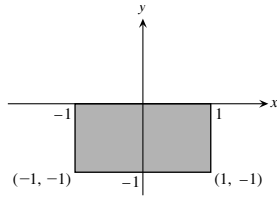
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Ενότητα 12.1, σελ. 952–954

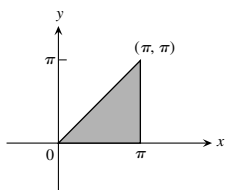
1. 16



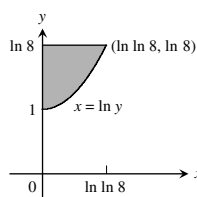
3. 1



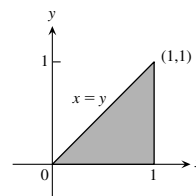
5. $\frac{\pi^2}{2} + 2$



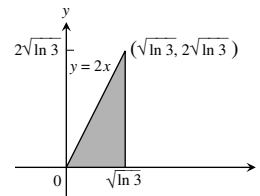
7. $8 \ln 8 - 16 + e$



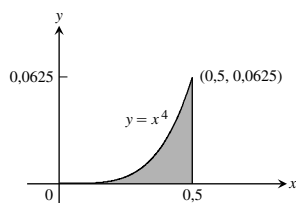
33. $\frac{e-2}{2}$



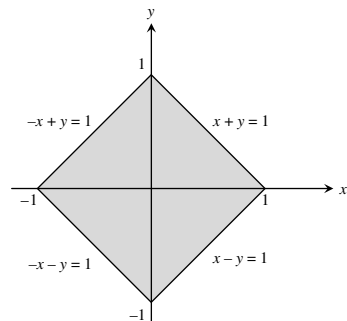
35. 2



37. $1/80\pi$



39. $-2/3$



41. $4/3$

45. 16

49. $2(1 + \ln 2)$

53. π^2

57. $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

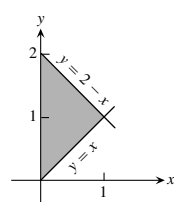
43. $625/12$

47. 20

51. 1

55. $-\frac{3}{32}$

59. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dy dx = \frac{4}{3}$



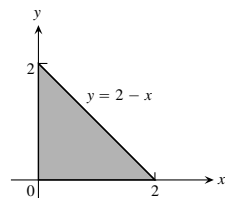
63. Όχι, βάσει του θεωρήματος του Fubini, η ολοκλήρωση με οποιαδήποτε σειρά οφείλει να μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

67. 0,603

69. 0,233

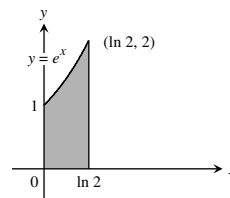
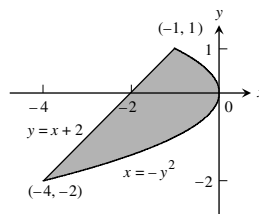
Ενότητα 12.2, σελ. 964-967

1. $\int_0^2 \int_0^{2-x} dy dx = 2$ or $\int_0^2 \int_0^{2-y} dx dy = 2$



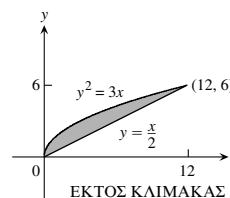
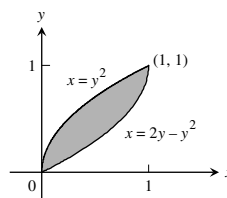
3. $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} dx dy = \frac{9}{2}$

5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dy dx = 1$



7. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx dy = \frac{1}{3}$

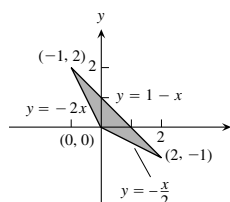
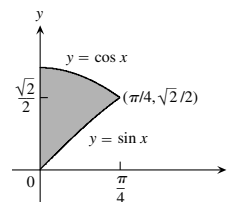
9. 12



ΕΚΤΟΣ ΚΑΙΜΑΚΑΣ

11. $\sqrt{2} - 1$

13. $\frac{3}{2}$



15. (α) 0

17. $8/3$

21. $\bar{x} = 64/35, \bar{y} = 5/7$

25. $\bar{x} = \bar{y} = 4a/3\pi$

29. $\bar{x} = -1, \bar{y} = 1/4$

(β) $4/\pi^2$

19. $\bar{x} = 5/14, \bar{y} = 38/35$

23. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 4/3\pi$

27. $I_x = I_y = 4\pi, I_0 = 8\pi$

31. $I_x = 64/105, R_x = 2\sqrt{2/7}$

33. $\bar{x} = 3/8, \bar{y} = 17/16$

35. $\bar{x} = 11/3, \bar{y} = 14/27, I_y = 432, R_y = 4$

37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 13/31, I_y = 7/5, R_y = \sqrt{21/31}$

39. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 7/10, I_x = 9/10, I_y = 3/10, I_0 = 6/5$

$R_x = 3\sqrt{6}/10, R_y = 3\sqrt{2}/10, R_0 = 3\sqrt{2}/5$

41. $40.000(1 - e^{-2}) \ln(7/2) \approx 43.329$

43. Αν $0 < a \leq 5/2$, τότε θα πρέπει να περιστρέψουμε τη συσκευή πάνω από 45° για να την ανατρέψουμε.

45. $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$

47. (α) $3/2$

(β) Είναι ίδιες.

53. (α) $(7/5, 31/10)$

(β) $(19/7, 18/7)$

(γ) $(9/2, 19/8)$

(δ) $(11/4, 43/16)$

55. Για να κείται επί του κοινού συνόρου το κέντρο μάζας, $h = a\sqrt{2}$. Για να κείται το κέντρο μάζας εντός του T, $h > a\sqrt{2}$.

Ενότητα 12.3, σελ. 972-973

1. $\pi/2$

3. $\pi/8$

5. πa^2

7. 36

9. $(1 - \ln 2)\pi$

11. $(2 \ln 2 - 1)(\pi/2)$

13. $\pi/2 + 1$

15. $\pi(\ln 4 - 1)$

17. $2(\pi - 1)$

19. 12π

21. $3\pi/8 + 1$

23. 4

25. $6\sqrt{3} - 2\pi$

27. $\bar{x} = 5/6, \bar{y} = 0$

29. $\frac{2a}{3}$

31. $\frac{2a}{3}$

33. $2\pi(2 - \sqrt{e})$

35. $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$

37. (α) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(β) 1

39. $\pi \ln 4$, όχι

41. $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

Ενότητα 12.4, σελ. 981–984

1. $1/6$

$$3. \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-3y/2} dz dy dx, \int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-3y/2} dz dx dy,$$

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{2-2x-2z/3} dy dz dx, \int_0^3 \int_0^{1-z/3} \int_0^{2-2x-2z/3} dy dx dz,$$

$$\int_0^2 \int_0^{3-y/2} \int_0^{1-y/2-z/3} dx dz dy, \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} \int_0^{1-y/2-z/3} dx dy dz.$$

Και τα έξι ολοκληρώματα ισούνται με 1.

$$5. \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 dz dy dx, \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 dz dx dy,$$

$$\int_{-2}^2 \int_0^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1 dx dz dy + \int_{-2}^2 \int_0^4 \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1 dx dz dy,$$

$$\int_0^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1 dx dy dz + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1 dx dy dz,$$

$$\int_{-2}^2 \int_0^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1 dy dz dx + \int_{-2}^2 \int_0^4 \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy dz dx,$$

$$\int_0^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1 dy dx dz + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy dx dz.$$

Και τα έξι ολοκληρώματα ισούνται με 16π .

7. 1

9. 1

11. $\frac{\pi^3}{2}(1 - \cos 1)$

13. 18

15. $7/6$

17. 0

19. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

21. (α) $\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-z} dy dz dx$

(β) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-z} dy dx dz$

(γ) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy dz$

(δ) $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dz dy$

(ε) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{1-y} dz dx dy$

23. $2/3$

25. $20/3$

27. 1

29. $16/3$

31. $8\pi - \frac{32}{3}$

33. 2

35. 4π

37. $31/3$

39. 1

41. $2 \sin 4$

43. 4

45. $a = 3$ ή $a = 13/3$

47. Πεδίο ορισμού είναι το σύνολο όλων των σημείων (x, y, z) τέτοιων ώστε $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$.

Ενότητα 12.5, σελ. 987–990

1. $R_x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{12}}, R_y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{12}}, R_z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$

3. $I_x = \frac{M}{3}(b^2 + c^2), I_y = \frac{M}{3}(a^2 + c^2), I_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$

5. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{12}{5}, I_x = 7904/105 \approx 75,28, I_y = 4832/63 \approx 76,70, I_z = 256/45 \approx 5,69$

7. (α) $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 8/3$

(β) $c = 2\sqrt{2}$

9. $I_L = 1386, R_L = \sqrt{\frac{77}{2}}$

11. $I_L = \frac{40}{3}, R_L = \sqrt{\frac{5}{3}}$

13. (α) $4/3$

(β) $\bar{x} = 4/5, \bar{y} = \bar{z} = 2/5$

15. (α) $5/2$

(β) $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 8/15$

(γ) $I_x = I_y = I_z = 11/6$

(δ) $R_x = R_y = R_z = \sqrt{\frac{11}{15}}$

17. 3

19. (α) $\frac{4}{3}g$

(β) $\frac{4}{3}g$

23. (α) $I_{\kappa,\mu} = \frac{abc(a^2 + b^2)}{12}, R_{\kappa,\mu} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$

(β) $I_L = \frac{abc(a^2 + 7b^2)}{3}, R_L = \sqrt{\frac{a^2 + 7b^2}{3}}$

27. (α) $h = a\sqrt{3}$

(β) $h = a\sqrt{2}$

Ενότητα 12.6, σελ. 998–1003

1. $\frac{4\pi(\sqrt{2} - 1)}{3}$

3. $\frac{17\pi}{5}$

5. $\pi(6\sqrt{2} - 8)$

7. $\frac{3\pi}{10}$

9. $\pi/3$

11. (α) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$

(β) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 r dr dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta$

(γ) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} r d\theta dz dr$

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{3r^2} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$

15. $\int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^{4-r \sin \theta} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$

17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} \int_0^4 f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$

19. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \int_0^{2-r \sin \theta} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$

21. π^2

23. $\pi/3$

25. 5π

27. 2π

29. $\left(\frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

31. (α) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\csc \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

(β) $\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/\rho)} \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/6} \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$

33. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\cos \phi}^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{31\pi}{6}$

35. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$

37. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{\pi}{3}$

39. (α) $8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

(β) $8 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$

(γ) $8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$

41. (α) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

(β) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$

(γ) $8 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$

(δ) $5\pi/3$

43. $8\pi/3$

47. $\frac{3\pi-4}{18}$

51. $5\pi/3$

55. $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

59. $5\pi/2$

63. $2/3$

67. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 3/8$

71. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 5/6$

75. $I_x = \pi/4$

79. (α) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{4}{5}\right), I_z = \frac{\pi}{12}, R_z = \sqrt{\frac{1}{3}}$

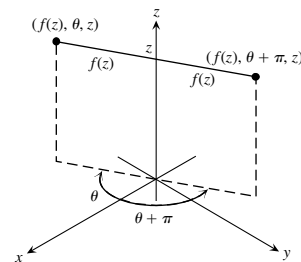
(β) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{5}{6}\right), I_z = \frac{\pi}{14}, R_z = \sqrt{\frac{5}{14}}$

83. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h^2+3h}{3h+6}\right), I_z = \frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4}, R_z = \frac{a}{\sqrt{2}}$

85. $\frac{3M}{\pi R^3}$

89. Η εξίσωση της επιφάνειας $r = f(z)$ μας λέει ότι το σημείο $(r, \theta, z) = (f(z), \theta, z)$ θα ανήκει στην επιφάνεια για

κάθε θ . Πιο συγκεκριμένα, το $(f(z), \theta + \pi, z)$ ανήκει στην επιφάνεια οποτεδήποτε το $(f(z), \theta, z)$ ανήκει στην επιφάνεια, άρα η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τον άξονα z .



Ενότητα 12.7, σελ. 1009–1011

1. (α) $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{v-2u}{3}, \frac{1}{3}$

(β) Τριγωνικό χωρίο με σύνορα $u = 0, v = 0$, και $u + v = 3$

3. (α) $x = \frac{1}{5}(2u - v), y = \frac{1}{10}(3v - u), \frac{1}{10}$

(β) Τριγωνικό χωρίο με σύνορα $3v = u, v = 2u$, και $3u + v = 10$

7. $64/5$

9. $\int_1^2 \int_1^3 (u+v) \frac{2u}{v} \, du \, dv = 8 + \frac{52}{3} \ln 2$

11. $\frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{4}$

13. $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) \approx 0,4687$

15. (α) $\begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$

(β) $\begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -u \sin^2 v - u \cos^2 v = -u$

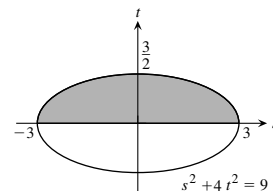
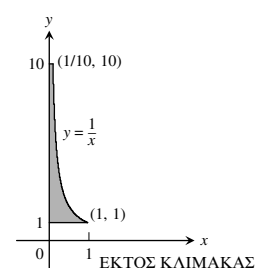
19. 12

21. $\frac{a^2 b^2 c^2}{6}$

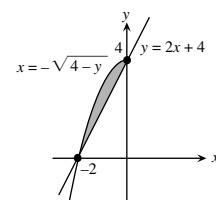
Ασκήσεις Κεφαλαίου 12, σελ. 1012–1014

1. $9e - 9$

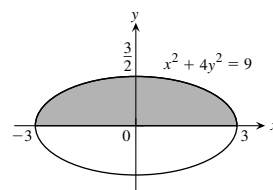
3. $9/2$



5. $\int_{-2}^0 \int_{2x+4}^{4-x^2} dy \, dx = \frac{4}{3}$



7. $\int_{-3}^3 \int_0^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y \, dy \, dx = \frac{9}{2}$



9. $\sin 4$

11. $\frac{\ln 17}{4}$

13. $4/3$

17. $1/4$

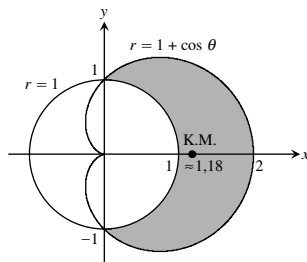
21. $I_0 = 104$

25. $M = 4, M_x = 0, M_y = 0$

29. $\bar{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \bar{y} = 0$

31. (α) $\bar{x} = \frac{15\pi + 32}{6\pi + 48}, \bar{y} = 0$

(β)



33. $\frac{\pi - 2}{4}$

37. $8/35$

41. $\frac{2(31 - 3^{5/2})}{3}$

43. (α) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3 dz dx dy$

(β) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 3\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

(γ) $2\pi(8 - 4\sqrt{2})$

45. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{3}$

47. $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 xy dz dy dx + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 xy dz dy dx$

49. (α) $\frac{8\pi(4\sqrt{2} - 5)}{3}$ (β) $\frac{8\pi(4\sqrt{2} - 5)}{3}$

51. $I_z = \frac{8\pi\delta(b^5 - a^5)}{15}$

15. $4/3$

19. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2 - \ln 4}$

23. $I_x = 2\delta, R_x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

27. π

17. $M\acute{\alpha}\zeta\alpha = a^2 \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2 - b^2},$

$$I_0 = \frac{a^4}{2} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^3}{2} \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{b}{6} (a^2 - b^2)^{3/2}$$

19. $\frac{1}{ab} (e^{a^2b^2} - 1)$

21. (β) 1

(γ) 0

25. $h = \sqrt{20} \text{ cm}, h = \sqrt{60} \text{ cm}$ 27. $2\pi \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Ενότητα 13.1, σελ. 1022–1023

1. Γράφημα (γ)

5. Γράφημα (δ)

9. $\sqrt{2}$

13. $3\sqrt{14}$

17. $\sqrt{3} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

21. 8

25. (α) $4\sqrt{2} - 2$

27. $I_z = 2\pi\delta a^3, R_z = a$

29. (α) $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta, R_z = 1$

31. $I_x = 2\pi - 2, R_x = 1$

3. Γράφημα (ζ)

7. Γράφημα (στ)

11. $\frac{13}{2}$

15. $\frac{1}{6} (5\sqrt{5} + 9)$

19. $\frac{10\sqrt{5} - 2}{3}$

23. $2\sqrt{2} - 1$

(β) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

(β) $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta, R_z = 1$

Ενότητα 13.2, σελ. 1032–1034

1. $\nabla f = -(xi + yj + zk)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

3. $\nabla g = -\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$, όπου $k > 0$

7. (α) $9/2$

(β) $13/3$

(γ) $9/2$

9. (α) $1/3$

(β) $-1/5$

(γ) 0

11. (α) 2

(β) $3/2$

(γ) $1/2$

13. $1/2$

15. $-\pi$

17. $69/4$

19. $-39/2$

21. $25/6$

23. (α) Κυκλοφορία₁ = 0, κυκλοφορία₂ = 2π , ροή₁ = 2π , ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης₂ = 0

(β) Κυκλοφορία₁ = 0, κυκλοφορία₂ = 8π , ροή₁ = 8π , ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης₂ = 0

25. Κυκλοφορία = 0, ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = $a^2\pi$

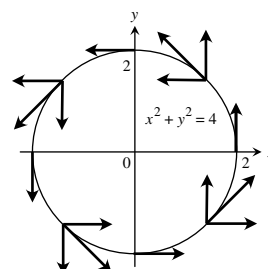
27. Κυκλοφορία = $a^2\pi$, ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = 0

29. (α) $-\frac{\pi}{2}$

(β) 0

(γ) 1

31.



Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 12, σελ. 1014–1016

1. (α) $\int_{-3}^2 \int_x^{6-x^2} x^2 dy dx$

(β) $\int_{-3}^2 \int_x^{6-x^2} \int_0^{x^2} dz dy dx$

(γ) $125/4$

3. 2π

5. $3\pi/2$

7. (α) Ακτίνα οπής = 1, ακτίνα σφαίρας = 2

(β) $4\sqrt{3}\pi$

9. $\pi/4$

11. $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

15. $1/\sqrt[4]{3}$

33. (α) $\mathbf{G} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(β) $\mathbf{G} = \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{F}$

35. $\mathbf{F} = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

37. 48

39. π

41. 0

43. $\frac{1}{2}$

Ενότητα 13.3, σελ. 1042–1043

1. Συντηρητικό

3. Μη συντηρητικό

5. Μη συντηρητικό

7. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

9. $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C$

11. $f(x, y, z) = x \ln x - x + \tan(x + y) + \frac{1}{2} \ln(y^2 + z^2) + C$

13. 49

15. -16

17. 1

19. $9 \ln 2$

21. 0

23. -3

27. $\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{x^2 - 1}{y} \right)$

29. (α) 1

(β) 1

(γ) 1

31. (α) 2

(β) 2

33. (α) $c = b = 2a$

(β) $c = b = 2$

35. Δεν έχει σημασία ποια διαδρομή θα επιλεγθεί. Το έργο θα είναι το ίδιο για κάθε διαδρομή δεδομένου ότι το πεδίο είναι συντηρητικό.

37. Η δύναμη $\mathbf{F}$ είναι συντηρητική διότι όλες οι μερικές παράγωγοι των M, N , και P είναι μηδέν. $f(x, y, z) = ax + by + cz + C$. $A = (xa, ya, za)$ και $B = (xb, yb, zb)$. Συνεπώς, $BF \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = a(xb - xa) + b(yb - ya) + c(zb - za) = \mathbf{F} \cdot AB$.

Ενότητα 13.4, σελ. 1053–1056

1. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = 0, κυκλοφορία = $2\pi a^2$

3. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = $-\pi a^2$, κυκλοφορία = 0

5. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = 2, κυκλοφορία = 0

7. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = -9, κυκλοφορία = 9

9. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = 1/2, κυκλοφορία = 1/2

11. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης = 1/5, κυκλοφορία = -1/12

13. 0

15. $2/33$

17. 0

19. $-\frac{1}{16}\pi$

21. πa^2

23. $\frac{3}{8}\pi$

25. (α) 0

(β) $(h - k)(\text{εμβαδόν χωρίου})$

35. (α) 0

Ενότητα 13.5, σελ. 1065–1067

1. $\frac{13}{3}\pi$

3. 4

5. $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

7. $\pi\sqrt{c^2 + 1}$

9. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

11. $3 + 2 \ln 2$

13. $9a^3$

15. $\frac{abc}{4}(ab + ac + bc)$

17. 2

19. 18

21. $\frac{\pi a^3}{6}$

23. $\frac{\pi a^2}{4}$

25. $\frac{\pi a^3}{2}$

27. -32

29. -4

31. $3a^4$

33. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

35. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{14}{9}\right), I_z = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta, R_z = \frac{\sqrt{10}}{2}$

37. (α) $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$

(β) $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$

39. $\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13} - 1)$

41. $5\pi\sqrt{2}$

43. $\frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1)$

Ενότητα 13.6, σελ. 1074–1077

1. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k}, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

3. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + (r/2)\mathbf{k}, 0 \leq r \leq 6, 0 \leq \theta \leq \pi/2$

5. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k},$

$0 \leq r \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

επίσης $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (3 \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (3 \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} +$

$(3 \cos \phi)\mathbf{k}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

7. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sqrt{3} \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sqrt{3} \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (\sqrt{3} \cos \phi)\mathbf{k}, \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

9. $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - y^2)\mathbf{k}, 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$

11. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + (3 \cos v)\mathbf{j} + (3 \sin v)\mathbf{k}, 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

13. (α) $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} +$

$(1 - r \cos \theta - r \sin \theta)\mathbf{k}, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

(β) $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u \cos v - u \sin v)\mathbf{i} + (u \cos v)\mathbf{j} +$

$(u \sin v)\mathbf{k}, 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

15. $\mathbf{r}(u, v) = (4 \cos^2 v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (4 \cos v \sin v)\mathbf{k},$

$0 \leq u \leq 3, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2.$

άλλος τρόπος: $\mathbf{r}(u, v) = (2 + 2 \cos v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (2 \sin v)\mathbf{k},$

$0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

17. $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} r dr d\theta = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

19. $\int_0^{2\pi} \int_1^3 r\sqrt{5} dr d\theta = 8\pi\sqrt{5}$

21. $\int_0^{2\pi} \int_1^4 1 du dv = 6\pi$

23. $\int_0^{2\pi} \int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 1} du dv = \frac{(5\sqrt{5} - 1)}{6}\pi$

25. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi} 2 \sin \phi d\phi d\theta = (4 + 2\sqrt{2})\pi$

27. $\int_S x d\sigma = \int_0^3 \int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 1} du dv = \frac{17\sqrt{17} - 1}{4}$

$$29. \iint_S x^2 d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$31. \iint_S z d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 (4-u-v)\sqrt{3} dv du = 3\sqrt{3}$$

(για $x = u, y = v$)

$$33. \iint_S x^2 \sqrt{5-4z} d\sigma =$$

$$\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} u^2 \cos^2 v \cdot \sqrt{4u^2+1} \cdot u \sqrt{4u^2+1} dv du =$$

$$\int_0^{1/2} u^3 (4u^2+1) \cos^2 v dv du = \frac{11\pi}{12}$$

$$35. -32$$

$$37. \frac{\pi a^3}{6}$$

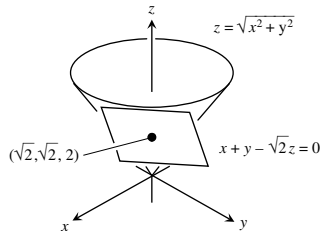
$$39. \frac{13a^4}{6}$$

$$41. \frac{2\pi}{3}$$

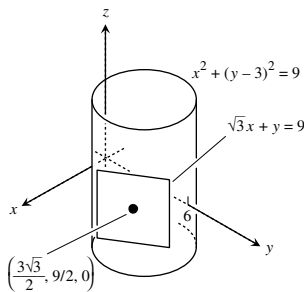
$$43. -\frac{73}{6}\pi$$

$$45. (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 14/9), I_z = \frac{(15\sqrt{2})\pi\delta}{2} R_z = \sqrt{5/2}$$

47.



49.



$$53. (\beta) A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (a^2 b^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + b^2 c^2 \cos^4 \phi \cos^2 \theta + a^2 c^2 \cos^4 \phi \sin^2 \theta)^{1/2} d\phi d\theta$$

Ενότητα 13.7, σελ. 1085–1086

$$1. 4\pi$$

$$3. -5/6$$

$$5. 0$$

$$7. -6\pi$$

$$9. 2\pi a^2$$

$$13. 12\pi$$

$$15. -\pi/4$$

$$17. -15\pi$$

$$25. 16I_y + 16I_x$$

Ενότητα 13.8, σελ. 1096–1098

$$1. 0$$

$$3. 0$$

$$5. -16$$

$$7. -8\pi$$

$$9. 3\pi$$

$$11. -40/3$$

$$13. 12\pi$$

$$15. 12\pi(4\sqrt{2}-1)$$

21. Η τιμή του ολοκληρώματος δεν υπερβαίνει ποτέ το εμβαδόν της επιφάνειας S .

Ασκήσεις Κεφαλαίου 13, σελ. 1099–1102

$$1. \text{ Διαδρομή 1: } 2\sqrt{3} \cdot \text{ διαδρομή 2: } 1 + 3\sqrt{2}$$

$$3. 4a^2$$

$$5. 0$$

$$7. 8\pi \sin(1)$$

$$9. 0$$

$$11. \pi\sqrt{3}$$

$$13. 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$15. \frac{abc}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

$$17. 50$$

$$19. \mathbf{r}(\phi, \theta) = (6 \sin \phi \cos \theta) \mathbf{i} + (6 \sin \phi \sin \theta) \mathbf{j} + (6 \cos \phi) \mathbf{k},$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$21. \mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta) \mathbf{i} + (r \sin \theta) \mathbf{j} + (1+r) \mathbf{k},$$

$$0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$23. \mathbf{r}(u, v) = (u \cos v) \mathbf{i} + 2u^2 \mathbf{j} + (u \sin v) \mathbf{k}, 0 \leq u \leq 1,$$

$$0 \leq v \leq \pi$$

$$25. \sqrt{6}$$

$$27. \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$$

29. Συντηρητικό

31. Μη συντηρητικό

$$33. f(x, y, z) = y^2 + yz + 2x + z$$

$$35. \text{ Διαδρομή 1: } 2 \cdot \text{ διαδρομή 2: } 8/3$$

$$37. (\alpha) 1 - e^{-2\pi}$$

$$(\beta) 1 - e^{-2\pi}$$

$$39. 0$$

$$41. (\alpha) 4\sqrt{2} - 2$$

$$(\beta) \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$43. (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(1, \frac{16}{15}, \frac{2}{3}\right), I_x = \frac{232}{45}, I_y = \frac{64}{15}, I_z = \frac{56}{9}$$

$$R_x = \frac{2\sqrt{29}}{3\sqrt{5}}, R_y = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, R_z = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$45. \bar{z} = \frac{3}{2}, I_z = \frac{7\sqrt{3}}{3}, R_z = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$47. (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 49/12), I_z = 640\pi, R_z = 2\sqrt{2}$$

49. Ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης: $3/2 \cdot$ κυκλοφορία: $-1/2$

$$53. 3$$

$$55. \frac{2\pi}{3} (7 - 8\sqrt{2})$$

$$57. 0$$

$$59. \pi$$

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 13, σελ. 1102–1104

$$1. 6\pi$$

$$3. 2/3$$

$$5. (\alpha) \mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

$$(\beta) \mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$$

$$(\gamma) \mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i}$$

7. $a = 2, b = 1$: η ελάχιστη ροή διά μέσου κλειστής καμπύλης είναι -4 .

$$9. (\beta) \frac{16}{3}g$$

$$(\gamma) \text{ Έργο} = \left(\int_C gxy ds \right) \bar{y} = g \int_C xy^2 ds$$

$$11. (\gamma) \frac{4}{3}\pi w$$

$$15. \Psiευδές αν $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α.4

1. (α) (14, 8) (β) (-1, 8) (γ) (0, -5)
3. (α) Κατοπτρίζοντας το z στον άξονα των πραγματικών
(β) Κατοπτρίζοντας το z στον άξονα των φανταστικών
(γ) Κατοπτρίζοντας το z στον άξονα των πραγματικών
και κατόπιν πολλαπλασιάζοντας το μέτρο του δια-
νύσματος με το $1/|z|^2$
5. (α) Σημεία πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$
(β) Σημεία στο εσωτερικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$
(γ) Σημεία στο εξωτερικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$
7. Σημεία πάνω στον κύκλο ακτίνας 1, και κέντρου (-1, 0)
9. Σημεία πάνω στην ευθεία $y = -x$
11. $4e^{2\pi i/3}$
13. $1e^{2\pi i/3}$
21. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

23. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
25. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$
27. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$
29. $1 \pm \sqrt{3}i, -1, \pm \sqrt{3}i$

Παράρτημα Α.10

1. -5
3. 1
5. -7
7. 38
9. $x = -4, y = 1$
11. $x = 3, y = 2$
13. $x = 3, y = -2, z = 2$
15. $x = 2, y = 0, z = -1$
17. (α) $h = 6, k = 4$ (β) $h = 6, k \neq 4$