

# 12

## Πολλαπλά ολοκληρώματα

**ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ** Τα προβλήματα που επιλύονται με την ολοκλήρωση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών αποτελούν γενικεύσεις παρόμοιων προβλημάτων που επιλύονται με την ολοκλήρωση συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Για τους σχετικούς υπολογισμούς, θα αξιοποιήσουμε την εμπειρία μας από τις συναρτήσεις αυτές.

### 12.1 Διπλά ολοκληρώματα

Διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε ορθογώνια χωρία • Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων • Διπλά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό όγκων • Το θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων • Διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε φραγμένα μη ορθογώνια χωρία • Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Θα δείξουμε τώρα πώς ολοκληρώνουμε μια συνεχή συνάρτηση  $f(x, y)$  σε ένα φραγμένο χωρίο του επιπέδου  $xy$ . Υπάρχουν αρκετές ομοιότητες μεταξύ των «διπλών» ολοκληρωμάτων που θα ορίσουμε εδώ και των «απλών» ολοκληρωμάτων που είδαμε στο Κεφάλαιο 4. Ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί σταδιακά, κάνοντας χρήση των μεθόδων ολοκλήρωσης συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

#### Διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε ορθογώνια χωρία

Έστω ότι η  $f(x, y)$  είναι ορισμένη σε ένα ορθογώνιο χωρίο  $R$  που δίνεται από τις σχέσεις

$$R: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

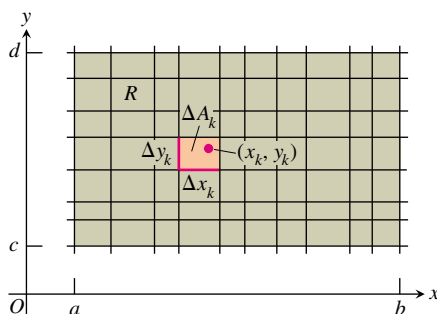
Ας φανταστούμε ότι το  $R$  σαρώνεται από ένα πλέγμα ευθειών παράλληλων στους άξονες  $x$  και  $y$  (Σχήμα 12.1). Οι ευθείες αυτές διαμερίζουν το  $R$  σε μικρά ορθογώνια υποχωρία εμβαδού  $\Delta A = \Delta x \Delta y$ , τα οποία ονομάζουμε  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ . Σε κάθε  $\Delta A_k$  επιλέγουμε ένα σημείο  $(x_k, y_k)$  και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (1)$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $R$ , τότε καθώς «πυκνώνουμε» το πλέγμα ώστε τα  $\Delta x$  και  $\Delta y$  να τείνουν στο μηδέν, τα αθροίσματα της Εξίσωσης (1) τείνουν σε όριο που καλούμε **διπλό ολοκλήρωμα** της  $f$  στο  $R$ . Συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό ως εξής:

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{ή και} \quad \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Έτσι,



**ΣΧΗΜΑ 12.1** Το ορθογώνιο πλέγμα διαχωρίζει την περιοχή  $R$  σε μικρά ορθογώνια εμβαδού  $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ .

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (2)$$

Όπως ίσχυε για απλά ολοκληρώματα, έτσι και εδώ, τα αθροίσματα τείνουν στο παραπάνω όριο ανεξάρτητα του τρόπου διαμέρισης των διαστημάτων  $[a, b]$  και  $[c, d]$  που ορίζουν το χωρίο  $R$ , αρκεί οι λεπτότητες των διαμερίσεων να τείνουν στο μηδέν. Επίσης, το όριο της Εξίσωσης (2) είναι ανεξάρτητο της σειράς με την οποία αριθμούμε τα εμβαδά  $\Delta A_k$ , καθώς και της επιλογής του σημείου  $(x_k, y_k)$  σε κάθε  $\Delta A_k$ . Οι τιμές των επιμέρους προσεγγιστικών αθροισμάτων  $S_n$  εξαρτώνται από τις παραπάνω επιλογές, αλλά εν τέλει τα αθροίσματα τείνουν στο ίδιο όριο. Η απόδειξη της ύπαρξης και μοναδικότητας του ορίου αυτού για μια συνεχή συνάρτηση  $f$  μπορεί να αναζητηθεί σε πιο προχωρημένα συγγράμματα. Η συνέχεια της  $f$  είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του διπλού ολοκληρώματος. Το όριο υπάρχει και σε περιπτώσεις στις οποίες η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

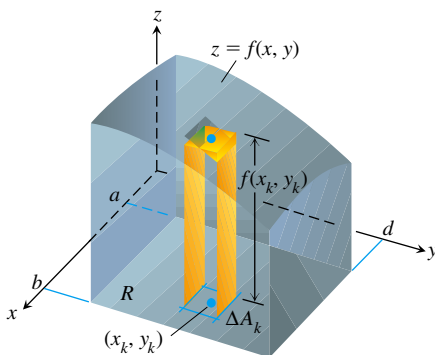
### Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

Κατ' αντιστοιχία με τα απλά ολοκληρώματα, έτσι και τα διπλά ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων παρουσιάζουν αλγεβρικές ιδιότητες που χρησιμεύουν σε διάφορους υπολογισμούς και εφαρμογές.



$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

**ΣΧΗΜΑ 12.2** Η ιδιότητα 4 ισχύει τόσο για απλά όσο και για διπλά ολοκληρώματα.



**ΣΧΗΜΑ 12.3** Η προσέγγιση στερεών με ορθογώνια παραλληλεπίπεδα οδηγεί στον ορισμό όγκων μέσω διπλών ολοκληρωμάτων. Ο όγκος του πρίσματος του σχήματος ισούται με το διπλό ολοκλήρωμα της  $f(x, y)$  ορισμένο στο χωρίο  $R$  της βάσης του στερεού.

#### Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων

1. **Σταθερό πολλαπλάσιο:**  $\iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA$   
(τυχών  $k$ )

2. **Άθροισμα και διαφορά:**

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

3.

(α)  $\iint_R f(x, y) dA \geq 0$  αν  $f(x, y) \geq 0$  στο  $R$

(β)  $\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$  αν  $f(x, y) \geq g(x, y)$  στο  $R$

4.  $\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$

όπου  $R$  είναι η ένωση των δύο μη αλληλεπικαλυπτόμενων ορθογώνιων χωρίων  $R_1$  και  $R_2$  (Σχήμα 12.2).

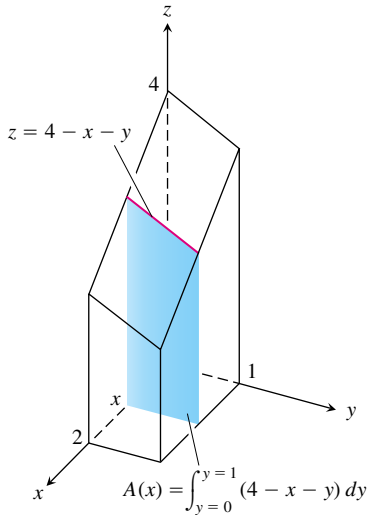
### Διπλά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό όγκων

Για θετική συνάρτηση  $f(x, y)$ , μπορούμε να ερμηνεύσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της  $f$  ορισμένο στο ορθογώνιο χωρίο  $R$  ως τον όγκο στερεού πρίσματος που είναι κάτω φραγμένο από το  $R$  και άνω φραγμένο από την επιφάνεια  $z = f(x, y)$  (Σχήμα 12.3). Κάθε όρος  $f(x_k, y_k) \Delta A_k$  του αθροίσματος  $S_n = \sum f(x_k, y_k) \Delta A_k$  ισούται με τον όγκο ενός κατακόρυφου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που προσεγγίζει τον

όγκο του τμήματος εκείνου του στερεού που βρίσκεται ακριβώς πάνω από τη βάση  $\Delta A_k$ . Έτσι το άθροισμα  $S_n$  προσεγγίζει τον συνολικό όγκο του στερεού. Ορίζουμε λοιπόν τον όγκο αυτόν ως

$$\text{Όγκος} = \lim S_n = \iint_R f(x, y) dA. \quad (3)$$

Όπως θα περίμενε κανείς, η γενική αυτή μέθοδος υπολογισμού όγκου συμφωνεί με τις μεθόδους του Κεφαλαίου 5, πράγμα που όμως δεν θα αποδείξουμε εδώ.



**ΣΧΗΜΑ 12.4** Το εμβαδόν διατομής  $A(x)$  υπολογίζεται αν διατηρήσουμε σταθερό το  $x$  και ολοκληρώσουμε ως προς  $y$ .

### Το θεώρημα του Fubini για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο μεταξύ του επιπέδου  $z = 4 - x - y$  και του ορθογώνιου χωρίου  $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$  του επιπέδου  $xy$ . Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο διατμήσεων της Ενότητας 5.1, με διατμήσεις κάθετες στον άξονα  $x$  (Σχήμα 12.4), τότε ο όγκος είναι

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x) dx, \quad (4)$$

όπου  $A(x)$  είναι το εμβαδόν διατομής στο  $x$ . Για κάθε τιμή του  $x$ , μπορούμε να υπολογίσουμε το  $A(x)$  ως το ολοκλήρωμα

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy, \quad (5)$$

που ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη  $z = 4 - x - y$  στο επίπεδο που ορίζει η διατομή στο  $x$ . Κατά τον υπολογισμό του  $A(x)$ , το  $x$  παραμένει σταθερό και η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα ως προς  $y$ . Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (4) και (5), βλέπουμε ότι ο όγκος του στερεού ισούται με

$$\begin{aligned} \text{Όγκος} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[ 4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left( \frac{7}{2} - x \right) dx \\ &= \left[ \frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5 \text{ κυβικές μονάδες.} \end{aligned} \quad (6)$$

Θα μπορούσαμε λοιπόν να γράψουμε

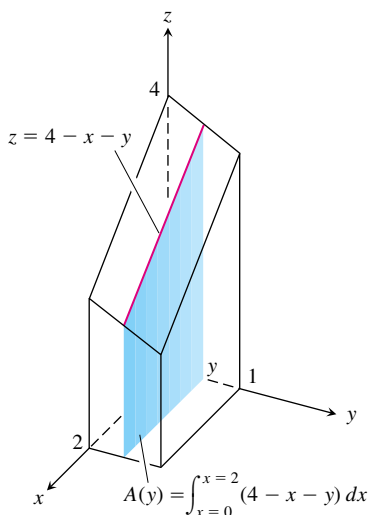
$$\text{Όγκος} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dy dx.$$

Η έκφραση στο δεξιό μέλος μας λέει ότι ο όγκος υπολογίζεται αν ολοκληρώσουμε την ποσότητα  $4 - x - y$  πρώτα ως προς  $y$  από  $y = 0$  έως  $y = 1$ , με σταθερό το  $x$ , και κατόπιν ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε ως προς  $x$  από  $x = 0$  έως  $x = 2$ .

Τι θα είχε συμβεί αν υπολογίζαμε τον όγκο με διατμήσεις κάθετες στον άξονα  $y$  (Σχήμα 12.5); Το εμβαδόν μιας διατομής θα γινόταν τώρα συνάρτηση του  $y$ ,

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx = \left[ 4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y. \quad (7)$$

Ο όγκος του στερεού ισούται λοιπόν με



**ΣΧΗΜΑ 12.5** Το εμβαδόν διατομής  $A(y)$  υπολογίζεται αν διατηρήσουμε σταθερό το  $y$  και ολοκληρώσουμε ως προς  $x$ .

$$\text{Όγκος} = \int_{y=0}^{y=1} A(y) dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y) dy = [6y - y^2]_0^1 = 5,$$

που συμφωνεί με τον υπολογισμό που κάναμε πρωτότερα.

Όπως και πριν, έτσι και τώρα μπορούμε να εκφράσουμε τον όγκο με το ολοκλήρωμα

$$\text{Όγκος} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dx dy.$$

Η έκφραση στο δεξιό μέλος σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε τον όγκο αν ολοκληρώσουμε την  $4 - x - y$  ως προς  $x$  από  $x = 0$  έως  $x = 2$  όπως στην Εξίσωση (7), και κατόπιν ολοκληρώσουμε ως προς  $y$  από  $y = 0$  έως  $y = 1$ . Η σειρά ολοκλήρωσης εδώ είναι πρώτα ως προς  $x$  και έπειτα ως προς  $y$ , αντίθετη δηλαδή από τη σειρά ολοκλήρωσης στην Εξίσωση (6).

Ποια σχέση έχουν οι δύο παραπάνω υπολογισμοί ολοκληρωμάτων με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R (4 - x - y) dA$$

ορισμένο στο ορθογώνιο χωρίο  $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ ; Η απάντηση είναι ότι αμφότεροι μας δίνουν την τιμή του διπλού ολοκληρώματος. Ένα θεώρημα που δημοσίευσε το 1907 ο Guido Fubini λέει ότι το διπλό ολοκλήρωμα τυχούσας συνεχούς συναρτήσεως σε ορθογώνιο χωρίο μπορεί να υπολογιστεί με όποια σειρά ολοκλήρωσης επιθυμούμε. (Ο Fubini απέδειξε το θεώρημα σε γενικότερη μορφή, αλλά η διατύπωση αυτή μας αρκεί.)

CD-ROM

ΔΙΚΤΥΟΤΟΠΟΣ

Βιογραφικά στοιχεία

Guido Fubini  
(1879-1943)

### Θεώρημα 1 Το Θεώρημα του Fubini (πρώτη μορφή)

Αν η  $f(x, y)$  είναι συνεχής παντού στο ορθογώνιο χωρίο  $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ , τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Το θεώρημα του Fubini λέει ότι διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε ορθογώνια χωρία μπορούν να υπολογιστούν με διαδοχική ολοκλήρωση ως προς τις εκάστοτε μεταβλητές.

Επίσης, το θεώρημα του Fubini λέει ότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εκτελούμε την ολοκλήρωση, πράγμα που διευκολύνει τους υπολογισμούς μας, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 3. Ειδικότερα, όταν υπολογίζουμε ολοκληρώματα με τη μέθοδο διατμήσεων, μπορούμε να τέμνουμε είτε κάθετα στον άξονα  $x$  είτε κάθετα στον άξονα  $y$ , ό,τι από τα δύο μας εξυπηρετεί περισσότερο.

### Παράδειγμα 1 Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος

Υπολογίστε το  $\iint_R f(x, y) dA$  για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = 1 - 6x^2y \quad \text{και το χωρίο} \quad R: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1.$$

**Λύση** Βάσει του θεωρήματος του Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 [x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = [2y - 8y^2]_{-1}^1 = 4 \text{ κυβικές μονάδες.} \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2 y) dy dx &= \int_0^2 \left[ y - 3x^2 y^2 \right]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)] dx \\ &= \int_0^2 2 dx = 4 \text{ κυβικές μονάδες.}\end{aligned}$$

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Πολλαπλή ολοκλήρωση** Τα περισσότερα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας μπορούν να υπολογίζουν πολλαπλά ολοκληρώματα εκτελώντας διαδοχικές ολοκληρώσεις. Η τυπική διαδικασία που ακολουθεί ένα τέτοιο σύστημα είναι να εκτελεί την ολοκλήρωση με τη σειρά που έχουμε δηλώσει ότι επιθυμούμε.

#### Ολοκλήρωμα

#### Τυπική διατύπωση σε υπολ. σύστημα

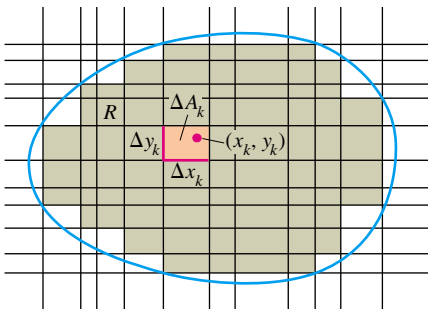
$$\iint x^2 y \, dx \, dy$$

$$\text{int}(\text{int}(x^2 * y, x), y)$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \int_0^1 x \cos y \, dx \, dy$$

$$\text{int}(\text{int}(x * \cos(y), x = 0 \dots 1), y = -\text{Pi}/3 \dots \text{Pi}/4)$$

Αν ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας δεν μπορεί να βρει την ακριβή τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος, μπορεί συνήθως να την προσεγγίσει αριθμητικά.



**ΣΧΗΜΑ 12.6** Το ορθογώνιο πλέγμα του σχήματος διαμερίζει ένα φραγμένο μη ορθογώνιο χωρίο σε κυψελίδες.

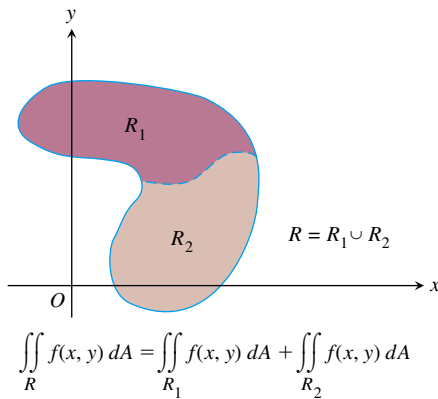
### Διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε φραγμένα μη ορθογώνια χωρία

Προκειμένου να ορίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης  $f(x, y)$  σε φραγμένο μη ορθογώνιο χωρίο, όπως αυτό του Σχήματος 12.6, θεωρούμε ότι το  $R$  καλύπτεται από ένα ορθογώνιο πλέγμα, αλλά στο μερικό άθροισμα κρατάμε μόνο τις κυψελίδες εμβαδού  $\Delta A = \Delta x \Delta y$  οι οποίες κείνται εξ ολοκλήρου μέσα στο χωρίο (γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος). Αριθμούμε τις κυψελίδες με κάποιον τρόπο, επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο  $(x_k, y_k)$  σε κάθε  $\Delta A_k$ , και σχηματίζουμε το άθροισμα

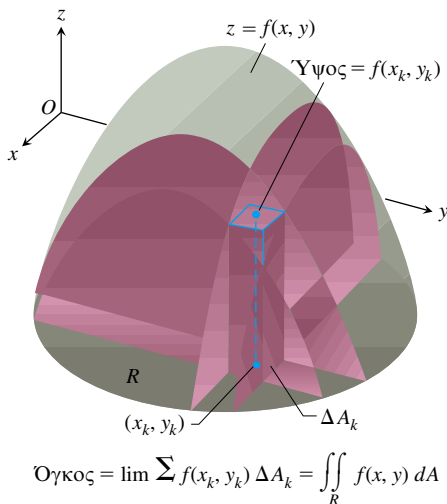
$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

Το άθροισμα αυτό διαφέρει από το άθροισμα της Εξίσωσης (1) που ίσχυε για ορθογώνια χωρία ως προς το ότι τώρα τα εμβαδά  $\Delta A_k$  δεν καλύπτουν πλήρως το χωρίο  $R$ . Καθώς όμως το πλέγμα γίνεται ολοένα και πυκνότερο, και το πλήθος όρων στο άθροισμα  $S_n$  αυξάνεται, όλο και μεγαλύτερο μέρος του  $R$  καλύπτεται από τις ορθογώνιες κυψελίδες. Έστω τώρα ότι η  $f$  είναι συνεχής και ότι το σύνορο του  $R$  αποτελείται από καμπύλες που αποτελούν γραφήματα πεπερασμένου πλήθους συνεχών συναρτήσεων των  $x$  και  $y$ , τις οποίες (καμπύλες) έχουμε συνδέσει στα άκρα τους. Στην περίπτωση αυτή, τα αθροίσματα  $S_n$  θα τείνουν σε κάποιο όριο καθώς οι λεπτότητες των διαμερίσεων που ορίζουν το ορθογώνιο πλέγμα τείνουν στο μηδέν χωριστά για κάθε άξονα. Καλούμε το όριο αυτό **διπλό ολοκλήρωμα** της  $f$  στο  $R$ :

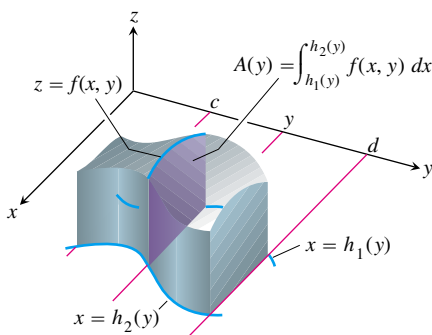
$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$



**ΣΧΗΜΑ 12.7** Η ιδιότητα 4 ισχύει επίσης για χωρία που φράσσονται από συνεχείς καμπύλες.



**ΣΧΗΜΑ 12.8** Οι όγκοι στερεών που έχουν καμπυλόγραμμας βάσεις ορίζονται με τον ίδιο τρόπο που ορίζονται και οι όγκοι στερεών με ορθογώνιες βάσεις.



**ΣΧΗΜΑ 12.10** Ο όγκος του στερεού του σχήματος είναι

$$\int_c^d A(y) dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Το όριο αυτό μπορεί να υπάρχει και υπό λιγότερο «περιοριστικούς» όρους.

Τα διπλά ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων σε μη ορθογώνια χωρία έχουν τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες με ολοκληρώματα ορισμένα σε ορθογώνια χωρία. Η ιδιότητα 4 λέει ότι αν το  $R$  «αποσυντεθεί» σε μη αλληλεπικαλυπτόμενα χωρία  $R_1$  και  $R_2$  των οποίων τα σύνορα αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων είτε λείων καμπυλών (δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 12.7), τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$

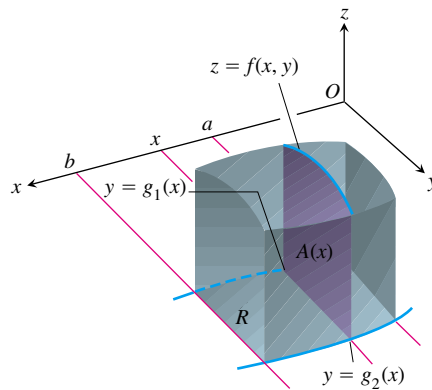
Αν η  $f(x, y)$  είναι θετική και συνεχής στο  $R$  ορίζουμε τον όγκο του στερεού μεταξύ του  $R$  και της επιφάνειας  $z = f(x, y)$  ως  $\iint_R f(x, y) dA$ , όπως και πριν (Σχήμα 12.8).

Αν  $R$  είναι χωρίο όπως αυτό του επιπέδου  $xy$  στο Σχήμα 12.9, που φράσσεται άνω και κάτω από τις καμπύλες  $y = g_2(x)$  και  $y = g_1(x)$  αντίστοιχα, ενώ από δεξιά και αριστερά φράσσεται από τις ευθείες  $x = a$ ,  $x = b$ , τότε μπορούμε και πάλι να υπολογίσουμε τον όγκο με διαμήσεις. Υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδόν διατομής

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy$$

και έπειτα ολοκληρώνουμε το  $A(x)$  από  $x = a$  έως  $x = b$ , δηλαδή βρίσκουμε τον όγκο με διαδοχική ολοκλήρωση:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (8)$$



**ΣΧΗΜΑ 12.9** Το εμβαδόν της κατακόρυφης τομής που φαίνεται εδώ είναι

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Για να βρούμε τον όγκο του στερεού, ολοκληρώνουμε το εμβαδόν αυτό από  $x = a$  έως  $x = b$ .

Ομοίως, αν  $R$  είναι το χωρίο του Σχήματος 12.10, που φράσσεται από τις καμπύλες  $x = h_2(y)$  και  $x = h_1(y)$  και από τις ευθείες  $y = c$  και  $y = d$ , τότε η μέθοδος διαμήσεων για τον υπολογισμό όγκου καταλήγει στο ολοκλήρωμα

$$\text{Όγκος} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Το ότι τα ολοκληρώματα των Εξισώσεων (8) και (9) δίνουν τον όγκο που ορίσαμε ως το διπλό ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $R$ , αποτελεί συνέπεια της ακόλουθης ισχυρής μορφής του θεωρήματος του Fubini.



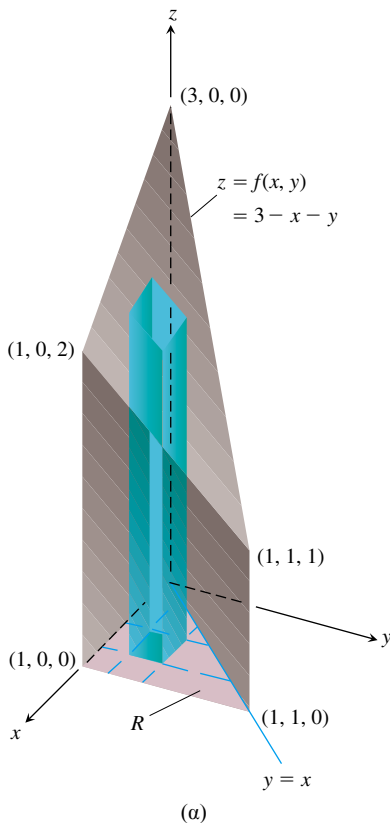
**ΣΧΗΜΑ 12.11** (α) Πρίσμα με τριγωνική βάση στο επίπεδο  $xy$ . Ο όγκος του πρίσματος ορίζεται ως διπλό ολοκλήρωμα στο  $R$ . Για να το υπολογίσουμε, μπορούμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς  $y$  και κατόπιν ως προς  $x$ , ή αντιστρόφως (Παράδειγμα 2). (β) Τα όρια ολοκλήρωσης είναι

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} f(x, y) dy dx.$$

Αν εκτελέσουμε πρώτα την ολοκλήρωση ως προς  $y$ , ολοκληρώνουμε κατά μήκος κατακόρυφης ευθείας και κατόπιν ολοκληρώνουμε από αριστερά προς τα δεξιά ώστε να συμπεριλάβουμε όλες τις κατακόρυφες ευθείες στο  $R$ . (γ) Τα όρια ολοκλήρωσης είναι

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} f(x, y) dx dy.$$

Αν εκτελέσουμε πρώτα την ολοκλήρωση ως προς  $x$ , ολοκληρώνουμε κατά μήκος οριζόντιας ευθείας και κατόπιν ολοκληρώνουμε από κάτω προς τα πάνω ώστε να συμπεριλάβουμε όλες τις οριζόντιες ευθείες στο  $R$ .



## Θεώρημα 2 Θεώρημα του Fubini (ισχυρή μορφή)

Έστω  $f(x, y)$  συνεχής σε χωρίο  $R$ .

1. Αν το  $R$  ορίζεται από τις σχέσεις  $a \leq x \leq b$ ,  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ , και οι  $g_1$  και  $g_2$  είναι συνεχείς στο  $[a, b]$ , τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

2. Αν το  $R$  ορίζεται από τις σχέσεις  $c \leq y \leq d$ ,  $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ , και οι  $h_1$  και  $h_2$  είναι συνεχείς στο  $[c, d]$ , τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

## Παράδειγμα 2 Εύρεση όγκου

Βρείτε τον όγκο του πρίσματος του οποίου η βάση είναι το τριγωνικό χωρίο στο επίπεδο  $xy$  που φράσσεται από τον άξονα  $x$  και από τις ευθείες  $y = x$  και  $x = 1$ , και του οποίου η άνω πλευρά ανήκει στο επίπεδο

$$z = f(x, y) = 3 - x - y.$$

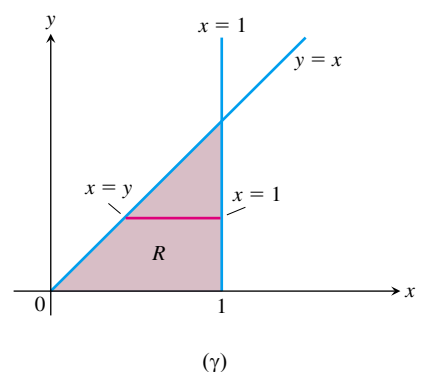
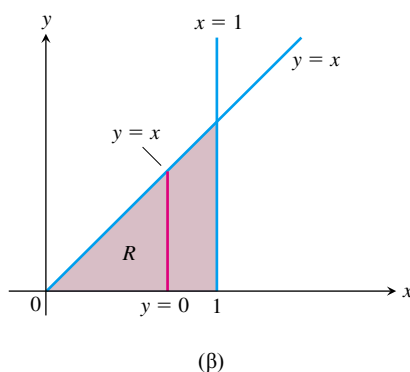
**Λύση** Δείτε το Σχήμα 12.11. Για κάθε  $x$  μεταξύ 0 και 1, το  $y$  μπορεί να μεταβάλλεται από  $y = 0$  έως  $y = x$  (Σχήμα 12.11β). Έτσι,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left[ 3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left( 3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[ \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1 \text{ κυβική μονάδα.} \end{aligned}$$

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης (Σχήμα 12.11γ), το ολοκλήρωμα του όγκου γίνεται

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[ 3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left( 3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2} y^2 \right) dy = \left[ \frac{5}{2} y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1 \text{ κυβική μονάδα.} \end{aligned}$$

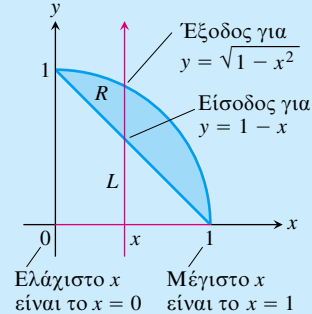
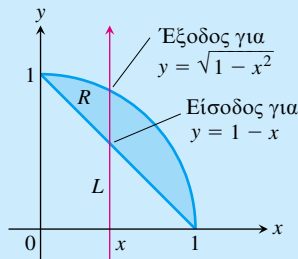
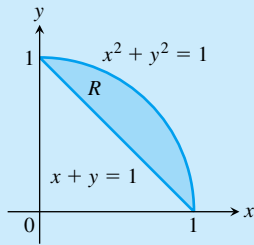
Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα, ως όφειλαν.



Παρ' όλο που το θεώρημα του Fubini μας εξασφαλίζει ότι ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με διαδοχική ολοκλήρωση με όποια σειρά ολοκλήρωσης θέλουμε, η επιλογή της μίας σειράς ολοκλήρωσης έναντι της άλλης μπορεί να επιβάλλεται από τη διευκόλυνση των υπολογισμών. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

### Διαδικασία εύρεσης ορίων ολοκλήρωσης

**A.** Για τον υπολογισμό του  $\iint_R f(x, y) dA$  σε χωρίο  $R$ , με ολοκλήρωση πρώτα ως προς  $y$  και κατόπιν ως προς  $x$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα.



**Βήμα 1: Σχήμα.** Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης και ονομάζουμε τις καμπύλες που το περικλείουν.

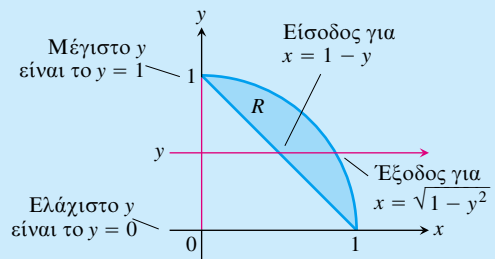
**Βήμα 2: Όρια ολοκλήρωσης στον άξονα y.** Θεωρούμε κατακόρυφη ευθεία  $L$  που τέμνει το  $R$  στην κατεύθυνση αύξησης του  $y$ . Σημειώνουμε τις τιμές  $y$  που αντιστοιχούν στα τυπικά σημεία εισόδου και εξόδου της  $L$  από το χωρίο. Οι τιμές αυτές είναι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς  $y$  και συνήθως είναι συναρτήσεις του  $x$  (και όχι σταθερές).

**Βήμα 3: Όρια ολοκλήρωσης στον άξονα x.** Επιλέγουμε όρια ολοκλήρωσης ως προς  $x$  που περιέχουν όλες τις κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από το  $R$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

**B.** Για να υπολογίσουμε το ίδιο ολοκλήρωμα με αντίστροφη σειρά ολοκλήρωσης, χρησιμοποιούμε οριζόντιες ευθείες αντί για κατακόρυφες. Το ολοκλήρωμα είναι

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy.$$



### Παράδειγμα 3 Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος

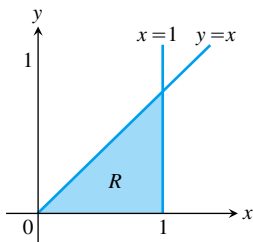
Υπολογίστε το

$$\iint_R \frac{\sin x}{x} dA,$$

όπου  $R$  είναι το τρίγωνο του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τον άξονα  $x$ , την ευθεία  $y = x$ , και την ευθεία  $x = 1$ .

**Λύση** Το χωρίο ολοκλήρωσης φαίνεται στο Σχήμα 12.12. Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς  $y$  και κατόπιν ως προς  $x$ , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left( y \frac{\sin x}{x} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \sin x dx \\ &= -\cos(1) + 1 \approx 0,46 \text{ κυβικές μονάδες.} \end{aligned}$$



**ΣΧΗΜΑ 12.12** Το χωρίο ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 3.



Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και αποπειραθούμε να υπολογίσουμε το

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy,$$

τότε αδυνατούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό, δεδομένου ότι το  $\int (\sin x)/x dx$  δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων.

Δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας που να μας λέει ως προς ποια μεταβλητή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε πρώτα, οπότε μην πονοκεφαλιάζετε για τη σειρά ολοκλήρωσης που θα επιλέξετε. Απλώς ξεκινήστε την ολοκλήρωση και αν στην πορεία δείτε ότι η σειρά ολοκλήρωσης που επιλέξατε δεν οδηγεί πουθενά, αντιστρέψτε την.

### Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Συχνά, το δυσκολότερο μέρος στον υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος είναι η εύρεση των ορίων ολοκλήρωσης. Για καλή μας τύχη, υπάρχει μια μέθοδος που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

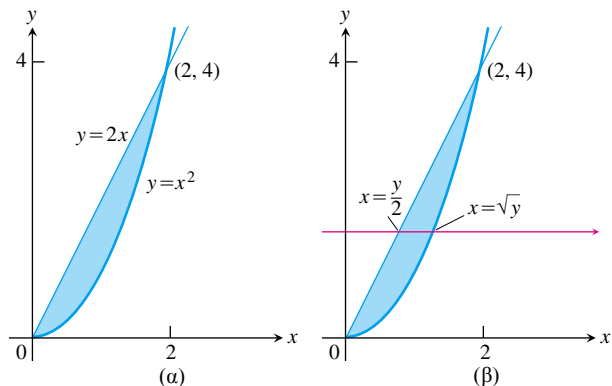
#### Παράδειγμα 4 Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης του

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx$$

και γράψτε ένα ισοδύναμο ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη.

**Λύση** Το χωρίο ολοκλήρωσης δίνεται από τις ανισότητες  $x^2 \leq y \leq 2x$  και  $0 \leq x \leq 2$ . Πρόκειται λοιπόν για το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες  $y = x^2$  και  $y = 2x$  από  $x = 0$  έως  $x = 2$  (Σχήμα 12.13α).



**ΣΧΗΜΑ 12.13** Το σχήμα αναφέρεται στο Παράδειγμα 4.

Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης όταν αντιστρέφουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, θεωρούμε μια οριζόντια ευθεία που τέμνει το χωρίο από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η ευθεία εισέρχεται στο χωρίο για  $x = y/2$  και εξέρχεται για  $x = \sqrt{y}$ . Για να συμπεριλάβουμε όλες τις ευθείες τέτοιου τύπου στον υπολογισμό μας, δίνουμε στο  $y$  τιμές από  $y = 0$  έως  $y = 4$  (Σχήμα 12.13β). Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy.$$

Και τα δύο ολοκληρώματα έχουν την τιμή 8.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.1

## Εύρεση χωρίου ολοκλήρωσης και διπλά ολοκληρώματα

Αφού σχεδιάσετε το χωρίο ολοκλήρωσης, υπολογίστε το ολοκλήρωμα σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-10.

1.  $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx$
2.  $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy) dy dx$
3.  $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy$
4.  $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy$
5.  $\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y dy dx$
6.  $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy dx$
7.  $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$
8.  $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy$
9.  $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx dy$
10.  $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} dy dx$

Στις Ασκήσεις 11-16, ολοκληρώστε την  $f$  στο χωρίο που δίνεται.

11. **Τετράγυρο**  $f(x, y) = x/y$  στο χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τις ευθείες  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .
12. **Τετράγυρο**  $f(x, y) = 1/(xy)$  στο τετράγυρο  $1 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 2$ .
13. **Τρίγωνο**  $f(x, y) = x^2 + y^2$  στην τριγωνική περιοχή με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ , και  $(0, 1)$ .
14. **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο**  $f(x, y) = y \cos xy$  στο χωρίο  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .
15. **Τρίγωνο**  $f(u, v) = v - \sqrt{u}$  στην τριγωνική περιοχή που αποκόπτεται από το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $uv$  η ευθεία  $u + v = 1$ .
16. **Καμπύλη περιοχή**  $f(s, t) = e^s \ln t$  στην περιοχή του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου  $st$  που κείται πάνω από την καμπύλη  $s = \ln t$  και εκτείνεται από  $t = 1$  έως  $t = 2$ .

Σε καθεμία των Ασκήσεων 17-20 δίνεται ένα ολοκλήρωμα ορισμένο σε μια περιοχή του καρτεσιανού επιπέδου. Σχεδιάστε την περιοχή αυτή και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

17.  $\int_{-2}^0 \int_v^{-v} 2 dp dv$  (επίπεδο  $pv$ )
18.  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t dt ds$  (επίπεδο  $st$ )
19.  $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{\sec t} 3 \cos t du dt$  (επίπεδο  $tu$ )
20.  $\int_0^3 \int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} dv du$  (επίπεδο  $uv$ )

## Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

Στις Ασκήσεις 21-30, σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και γράψτε ένα ισοδύναμο διπλό ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη.

21.  $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy dx$
22.  $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx dy$
23.  $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy$
24.  $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy dx$
25.  $\int_0^1 \int_1^{e^x} dy dx$
26.  $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2^2} dx dy$
27.  $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x dy dx$
28.  $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y dx dy$
29.  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y dx dy$
30.  $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x dx dy$

## Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 31-40, σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης, αντιστρέψτε τη σειρά ολοκλήρωσης, και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

31.  $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy dx$
32.  $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy dy dx$
33.  $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy$
34.  $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx$
35.  $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dx dy$
36.  $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} dy dx$
37.  $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5) dx dy$
38.  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy dx}{y^4 + 1}$
39. **Τετραγωνική περιοχή**  $\iint_R (y - 2x^2) dA$  όπου  $R$  είναι το χωρίο που φράσσεται από το τετράγυρο  $|x| + |y| = 1$ .
40. **Τριγωνική περιοχή**  $\iint_R xy dA$  όπου  $R$  είναι το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες  $y = x$ ,  $y = 2x$ , και  $x + y = 2$ .

Όγκος κάτω από την επιφάνεια  $z = f(x, y)$ 

41. Βρείτε τον όγκο του χωρίου που φράσσεται από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$  και βρίσκεται κάτω από το τρίγωνο που ορίζουν οι ευθείες  $y = x$ ,  $x = 0$ , και  $x + y = 2$  του επιπέδου  $xy$ .
42. Βρείτε τον όγκο του στερεού που είναι άνω φραγμένο από τον κύλινδρο  $z = x^2$  και κάτω φραγμένο από το χωρίο που ορίζουν η παραβολή  $y = 2 - x^2$  και η ευθεία  $y = x$  του επιπέδου  $xy$ .
43. Βρείτε τον όγκο του στερεού που έχει βάση το χωρίο του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από την παραβολή  $y = 4 - x^2$  και την ευθεία  $y = 3x$ , ενώ η άνω πλευρά του στερεού φράσσεται από το επίπεδο  $z = x + 4$ .
44. Βρείτε τον όγκο του στερεού του πρώτου οκτημορίου που φράσσεται από τα επίπεδα των αξόνων συντεταγμένων, από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$ , και από το επίπεδο  $z + y = 3$ .

45. Βρείτε τον όγκο του στερεού του πρώτου οκταμήριου που φράσσεται από τα επίπεδα των αξόνων συντεταγμένων, από το επίπεδο  $x = 3$ , και από τον παραβολικό κύλινδρο  $z = 4 - y^2$ .
46. Βρείτε τον όγκο του στερεού το οποίο αποκόπτεται από το πρώτο οκταμήριο η επιφάνεια  $z = 4 - x^2 - y$ .
47. Βρείτε τον όγκο της σφηνοειδούς βαθμίδας που αποκόπτονται από το πρώτο οκταμήριο ο κύλινδρος  $z = 12 - 3y^2$  και το επίπεδο  $x + y = 2$ .
48. Βρείτε τον όγκο του στερεού που αποκόπτονται από τη στερεά «στήλη»  $|x| + |y| \leq 1$  τα επίπεδα  $z = 0$  και  $3x + z = 3$ .
49. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται μπροστά και πίσω από τα επίπεδα  $x = 2$  και  $x = 1$ , δεξιά και αριστερά από τους κυλίνδρους  $y = \pm 1/x$ , και πάνω και κάτω από τα επίπεδα  $z = x + 1$  και  $z = 0$ .
50. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται μπροστά και πίσω από τα επίπεδα  $x = \pm \pi/3$ , δεξιά και αριστερά από τους κυλίνδρους  $y = \pm \sec x$ , πάνω από τον κύλινδρο  $z = 1 + y^2$ , και κάτω από το επίπεδο  $xy$ .

### Ολοκληρώματα ορισμένα σε μη φραγμένες περιοχές

Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα που δίνονται στις Ασκήσεις 51-54 εκτελώντας διαδοχικά τις ολοκληρώσεις.

51.  $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx$
52.  $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y + 1) dy dx$
53.  $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} dx dy$
54.  $\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-(x+2y)} dx dy$

### Προσεγγίζοντας διπλά ολοκληρώματα

Στις Ασκήσεις 55 και 56, προσεγγίστε το διπλό ολοκλήρωμα της  $f(x, y)$  στο χωρίο  $R$  που διαμερίζεται από τις δοθείσες κατακόρυφες ευθείες  $x = a$  και οριζόντιες ευθείες  $y = c$ . Σε κάθε ορθογώνιο υποχωρίο, χρησιμοποιήστε το  $(x_k, y_k)$  που σας δίνει η προσέγγισή σας.

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

55.  $f(x, y) = x + y$  στο χωρίο  $R$  που είναι άνω φραγμένο από το ημικύκλιο  $y = \sqrt{1 - x^2}$  και κάτω φραγμένο από τον άξονα  $x$ . Χρησιμοποιήστε τη διαμέριση  $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$  και  $y = 0, 1/2, 1$  και θεωρήστε το  $(x_k, y_k)$  στην κάτω αριστερή γωνία του  $k$ -στού υποχωρίου (αρκεί το υποχωρίο να ανήκει στο  $R$ ).
56.  $f(x, y) = x + 2y$  στο χωρίο  $R$  εντός του κύκλου  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ . Χρησιμοποιήστε τη διαμέριση  $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$  και  $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$  και θεωρήστε το  $(x_k, y_k)$  ως το κέντρο (κεντροειδές) του  $k$ -στού υποχωρίου (αρκεί το υποχωρίο να ανήκει στο  $R$ ).

### Θεωρία και παραδείγματα

57. **Κυκλικός τομέας** Ολοκληρώστε την  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$

στον μικρό κυκλικό τομέα που αποκόπτονται από τον κυκλικό δίσκο  $x^2 + y^2 \leq 4$  οι ημιευθείες  $\theta = \pi/6$  και  $\theta = \pi/2$ .

58. **Μη φραγμένη περιοχή** Ολοκληρώστε την  $f(x, y) = 1/[(x^2 - x)(y - 1)^{2/3}]$  στο άπειρο ορθογώνιο  $2 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .
59. **Μη κυκλικός κύλινδρος** Ένας στερεός ορθός (μη κυκλικός) κύλινδρος έχει τη βάση του  $R$  στο επίπεδο  $xy$  και η άνω πλευρά του φράσσεται από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ . Ο όγκος του κυλίνδρου είναι

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Σχεδιάστε τη βάση  $R$  και εκφράστε τον όγκο του κυλίνδρου ως ένα και μόνο ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα αυτό για να βρείτε τον όγκο.

60. **Μετατροπή σε διπλό ολοκλήρωμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x) dx.$$

(Υπόδειξη: Γράψτε την ολοκληρωτέα ποσότητα ως ολοκλήρωμα.)

61. **Μεγιστοποίηση διπλού ολοκληρώματος** Για ποια περιοχή  $R$  του επιπέδου  $xy$  μεγιστοποιείται η τιμή του

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2) dA;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

62. **Ελαχιστοποίηση διπλού ολοκληρώματος** Για ποια περιοχή  $R$  του επιπέδου  $xy$  ελαχιστοποιείται η τιμή του

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9) dA;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

63. **Μάθετε γράφοντας** Είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης  $f(x, y)$  σε μια ορθογώνια περιοχή του επιπέδου  $xy$  και να πάρουμε διαφορετικά αποτελέσματα αναλόγως της σειράς ολοκλήρωσης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

64. **Μάθετε γράφοντας** Πώς θα υπολογίζατε το διπλό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης  $f(x, y)$  στην περιοχή  $R$  του επιπέδου  $xy$  που περικλείεται από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$ , και  $(1, 2)$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

65. **Μη φραγμένη περιοχή** Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= 4 \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

66. **Γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα** Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} dy dx.$$

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

## Αριθμητικός υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων

Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας προκειμένου να εκτιμήσετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων των Ασκήσεων 67-70.

$$67. \int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy} dy dx$$

$$68. \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)} dy dx$$

$$69. \int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy dy dx$$

$$70. \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$$

Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας προκειμένου να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 71-76. Κατόπιν, αντιστρέψτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε πάλι κάθε ολοκλήρωμα.

$$71. \int_0^1 \int_{2y}^4 e^{x^2} dx dy$$

$$72. \int_0^3 \int_{x^2}^9 x \cos(y^2) dy dx$$

$$73. \int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2) dx dy$$

$$74. \int_0^2 \int_0^{4-y^2} e^{xy} dx dy$$

$$75. \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{x+y} dy dx$$

$$76. \int_1^2 \int_{y^3}^8 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

## 12.2

## Εμβαδά, ροπές και κέντρα μάζας\*

Εμβαδά φραγμένων χωρίων στο επίπεδο • Μέση τιμή • Ροπές και κέντρα μάζας • Μάζες κατανομημένες σε επίπεδο χωρίο • Λεπτά και επίπεδα στρώματα με συνεχή κατανομή μάζας • Ροπές αδρανείας • Κεντροειδή γεωμετρικών σχημάτων

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πώς χρησιμοποιούμε διπλά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό εμβαδών φραγμένων χωρίων του επιπέδου και για την εύρεση της μέσης τιμής μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το φυσικό πρόβλημα εύρεσης του κέντρου μάζας ενός λεπτού στρώματος που καλύπτει ένα χωρίο του επιπέδου.

## Εμβαδά φραγμένων χωρίων στο επίπεδο

Αν στον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος σε ένα χωρίο  $R$ , που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, θέσουμε  $f(x, y) = 1$ , τότε τα μερικά αθροίσματα παίρνουν τη μορφή

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \sum_{k=1}^n \Delta A_k.$$

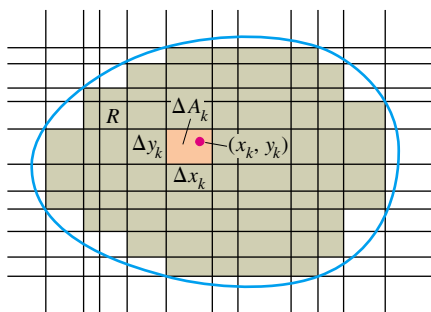
Η έκφραση αυτή προσεγγίζει εκείνο που θα θέλαμε να ονομάζουμε εμβαδόν της περιοχής  $R$ . Καθώς τα  $\Delta x$  και  $\Delta y$  τείνουν στο μηδέν, τα  $\Delta A_k$  καλύπτουν το χωρίο  $R$  ολοένα και περισσότερο (Σχήμα 12.14), οπότε ορίζουμε ως εμβαδόν του  $R$  το όριο

$$\text{Εμβαδόν} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \iint_R dA.$$

## Ορισμός Εμβαδόν

Το **εμβαδόν** ενός κλειστού, φραγμένου χωρίου  $R$  στο επίπεδο είναι

$$A = \iint_R dA.$$



**ΣΧΗΜΑ 12.14** Το πρώτο βήμα στον ορισμό του εμβαδού ενός χωρίου είναι να διαμερίσουμε το εσωτερικό του χωρίου σε κυψελίδες.

\*Η συζήτηση περί μαζών και ροπών της ενότητας αυτής είναι αυτόνομη και δεν προαπαιτεί μελέτη του Κεφαλαίου 5. Όλες οι ουσιώδεις έννοιες παρατίθενται εδώ εκ νέου, επαναλαμβάνοντας εν μέρει όσα ειπώθηκαν περί ροπών στο Κεφάλαιο 5.

Ο ορισμός αυτός ισχύει για πολύ μεγαλύτερη ποικιλία χωρίων απ' ό,τι ο ορισμός μέσω ολοκληρώματος μίας μεταβλητής που είδαμε προωτέρω. Ωστόσο, στις περιπτώσεις στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν και οι δύο ορισμοί, αυτοί συμφωνούν μεταξύ τους.

Υπολογίζουμε το εμβαδόν ολοκληρώνοντας τη σταθερή συνάρτηση  $f(x, y) = 1$  στην περιοχή  $R$ .

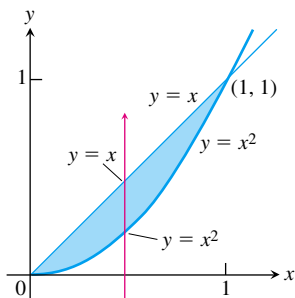
### Παράδειγμα 1 Εύρεση εμβαδού

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $R$  που φράσσεται από τις «καμπύλες»  $y = x$  και  $y = x^2$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

**Λύση** Σχεδιάζουμε το χωρίο (Σχήμα 12.15) και υπολογίζουμε το εμβαδόν του ως εξής

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx = \int_0^1 \left[ y \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad \text{τετραγωνικές μονάδες.} \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το απλό ολοκλήρωμα  $\int_0^1 (x - x^2) dx$ , που προκύπτει μετά τον υπολογισμό του εσωτερικού ολοκληρώματος, δεν είναι παρά το ολοκλήρωμα του εμβαδού μεταξύ των δύο καμπυλών που θα παίρναμε εφαρμόζοντας τη μέθοδο της Ενότητας 4.6.



ΣΧΗΜΑ 12.15 Το χωρίο του Παραδείγματος 1.

### Παράδειγμα 2 Εύρεση εμβαδού

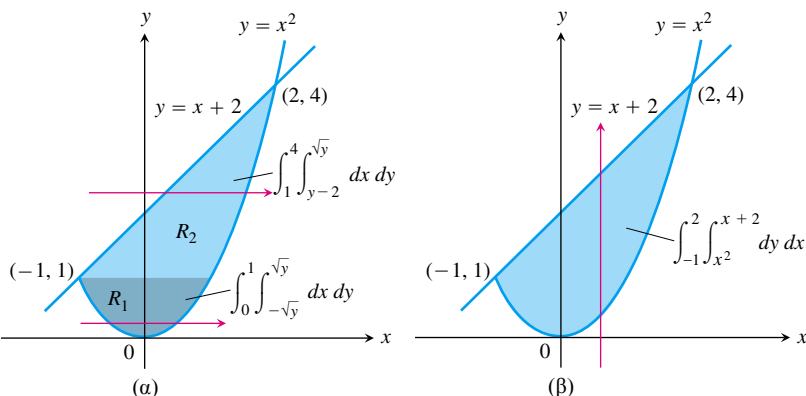
Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $R$  που περικλείεται από την παραβολή  $y = x^2$  και την ευθεία  $y = x + 2$ .

**Λύση** Αν διαιρέσουμε το  $R$  στα χωρία  $R_1$  και  $R_2$  του Σχήματος 12.16α, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ως εξής

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \, dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx \, dy.$$

Από την άλλη, αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης (Σχήμα 12.16β), παίρνουμε

$$A = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx.$$



ΣΧΗΜΑ 12.16 Ο υπολογισμός του εμβαδού αυτού περιλαμβάνει (α) δύο διπλά ολοκληρώματα, αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς  $x$ , αλλά (β) μόνο ένα διπλό ολοκλήρωμα, αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς  $y$ . (Παράδειγμα 2)

Το αποτέλεσμα αυτό είναι απλούστερο και συνεπώς το προτιμούμε. Το εμβαδόν είναι

$$A = \int_{-1}^2 [y]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

### Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης μίας μεταβλητής σε κλειστό διάστημα ισούται με το πηλίκο του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο διάστημα, διά το μήκος του διαστήματος. Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών που ορίζεται σε κλειστό και φραγμένο χωρίο του οποίου το εμβαδόν μπορεί να μετρηθεί, η μέση τιμή ισούται με το πηλίκο του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο χωρίο, διά το εμβαδόν του χωρίου. Αν  $f$  είναι η συνάρτηση και  $R$  είναι το χωρίο, τότε

$$\text{Μέση τιμή της } f \text{ στο } R = \frac{1}{\text{εμβαδόν του } R} \iint_R f dA. \quad (1)$$

Αν  $f$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα ενός λεπτού στρώματος που καλύπτει το  $R$ , τότε το διπλό ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $R$  διά το εμβαδόν του  $R$  είναι η μέση πυκνότητα του στρώματος, σε μονάδες μάζας ανά μονάδα εμβαδού. Αν  $f(x, y)$  είναι η απόσταση του σημείου  $(x, y)$  από το σταθερό σημείο  $P$ , τότε η μέση τιμή της  $f$  στο  $R$  είναι η μέση απόσταση των σημείων του  $R$  από το  $P$ .

### Παράδειγμα 3 Εύρεση μέσης τιμής

Βρείτε τη μέση τιμή της  $f(x, y) = x \cos xy$  στο ορθογώνιο χωρίο  $R: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ .

**Λύση** Το ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $R$  ισούται με

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^1 x \cos xy \, dy \, dx &= \int_0^\pi \left[ \sin xy \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x - 0) \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Το εμβαδόν του  $R$  ισούται με  $\pi$ . Η μέση τιμή της  $f$  στο  $R$  είναι  $2/\pi$ .

### Ροπές και κέντρα μάζας

Πολλές μηχανικές δομές και συστήματα συμπεριφέρονται σαν να ήταν συγκεντρωμένη η μάζα τους σε ένα και μόνο σημείο, το οποίο καλούμε κέντρο μάζας. Έχει σημασία να γνωρίζουμε πώς να εντοπίζουμε το σημείο αυτό, πράγμα που ουσιαστικά είναι ένα μαθηματικό εγχείρημα. Θα αναπτύξουμε το μαθηματικό μας μοντέλο σε στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι να θεωρήσουμε ότι οι μάζες  $m_1$ ,  $m_2$ , και  $m_3$  προσδένονται σε άκαμπτο άξονα  $x$  ο οποίος στηρίζεται σε υπομόχλιο τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων.



Το σύστημα μπορεί να ισορροπεί, ή όχι. Αυτό εξαρτάται από το μέγεθος των μαζών και τον τρόπο διάταξής τους πάνω στον άξονα.

### Μάζα έναντι Βάρους

Βάρος είναι η δύναμη που ασκείται σε μια μάζα λόγω βαρύτητας. Αν στο σημείο όπου βρίσκεται ένα σώμα μάζας  $m$  η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ , το βάρος του σώματος στο σημείο αυτό είναι

$$F = mg$$

(βάσει του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα).



Κάθε μάζα  $m_k$  ασκεί μια δύναμη  $m_k g$  προς τα κάτω, ίση κατά μέτρο με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση της βαρύτητας. Καθemia από τις δυνάμεις αυτές έχει την τάση να στρέψει τον άξονα ως προς την αρχή, όπως συμβαίνει σε μια τραμπάλα. Αυτή η επίδραση καλείται **ροπή βαρύτητας**, και υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε τη βαρυτική δύναμη  $m_k g$  με την προσημασμένη απόσταση  $x_k$  του σημείου εφαρμογής της από την αρχή των αξόνων. Όσες μάζες βρίσκονται στα αριστερά της αρχής ασκούν αρνητική (αριστερόστροφη) ροπή βαρύτητας. Οι μάζες στα δεξιά της αρχής ασκούν θετική (δεξιόστροφη) ροπή βαρύτητας.

Το άθροισμα των ροπών βαρύτητας δείχνει την τάση που έχει ένα σύστημα για περιστροφή ως προς την αρχή, και καλείται **ροπή βαρύτητας του συστήματος**.

$$\text{Ροπή βαρύτητας του συστήματος} = \sum m_k g x_k \quad (2)$$

Το σύστημα θα ισορροπεί σε βαρυτικά πεδία αν και μόνο αν η ροπή βαρύτητας του μηδενίζεται.

Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το  $g$  από την Εξίσωση (2), βλέπουμε ότι η ροπή βαρύτητας του συστήματος ισούται με

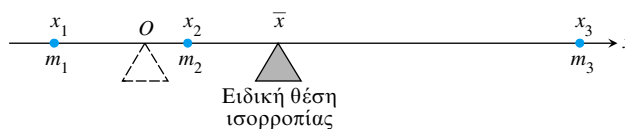
$$g \sum m_k x_k$$

Χαρακτηρίζει το περιβάλλον
Χαρακτηρίζει το σύστημα

Δηλαδή, η ροπή βαρύτητας είναι το γινόμενο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g$ , που χαρακτηρίζει το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται το σύστημα, επί την ποσότητα  $\sum m_k x_k$ , που χαρακτηρίζει το ίδιο το σύστημα και μένει σταθερή όπου και αν το τοποθετήσουμε. Η σταθερά αυτή καλείται **πρώτη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή**.

$$\text{Πρώτη ροπή συστήματος ως προς την αρχή} = \sum m_k x_k \quad (3)$$

Συνήθως, μας ενδιαφέρει να μάθουμε σε ποια θέση πρέπει να τοποθετήσουμε το υπομόχλιο ώστε να ισορροπήσει το σώμα, δηλαδή ζητούμε το σημείο  $\bar{x}$  στο οποίο, αν τοποθετήσουμε το υπομόχλιο, θα μηδενιστεί η ροπή.



Η ροπή βαρύτητας κάθε μάζας ως προς το υπομόχλιο στην ειδική αυτή θέση είναι

$$\begin{aligned} \text{Ροπή βαρύτητας της } m_k \text{ ως προς } \bar{x} &= \left( \begin{array}{l} \text{προσημασμένη} \\ \text{απόσταση της } m_k \\ \text{από το } \bar{x} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{δύναμη προς} \\ \text{τα κάτω} \end{array} \right) \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g. \end{aligned}$$

Αν γράψουμε τώρα την εξίσωση που μας λέει ότι το άθροισμα των ροπών αυτών μηδενίζεται, παίρνουμε μια εξίσωση που λύνουμε ως προς  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x}) m_k g &= 0 && \text{Το άθροισμα των ροπών είναι μηδέν} \\ g \sum (x_k - \bar{x}) m_k &= 0 && \text{Άθροισμα σταθερών πολλαπλασίων} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) &= 0 && \text{Διαιρούμε με } g, \text{ επιμεριστικός} \\ &&& \text{κανόνας πολλαπλασιασμού για το } m_k \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k &= 0 && \text{Άθροισμα διαφορών} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x} \sum m_k && \text{Αναδιατάσσουμε, άθροισμα} \\ &&& \text{σταθερών πολλαπλασίων και πάλι} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \text{Λύνουμε ως προς } \bar{x} \end{aligned}$$

## CD-ROM

### Δικτυότοπος

#### Βιογραφικά στοιχεία

Christian Felix  
Klein  
(1849-1925)



Σ.τ.Μ.: Στο σημείο αυτό, δυστυχώς, η ελληνική ορολογία δεν έχει ανταποκριθεί επαρκώς στην ποικιλία της αντίστοιχης αγγλικής. Έτσι, αναγκαστήσαμε να αποδώσουμε δύο διαφορετικούς αγγλικούς όρους (torque και moment) με την ίδια λέξη: «ροπή». Αυτό μας αναγκάζει να προσθέσουμε ένα δεύτερο συνθετικό, κάνοντας λόγο για *ροπή δύναμης* (εδώ, *βαρύτητας*) στην πρώτη περίπτωση, και για *πρώτη ροπή* στη δεύτερη.

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι το  $\bar{x}$  βρίσκεται αν διαιρέσουμε την πρώτη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή, με την ολική μάζα του συστήματος:

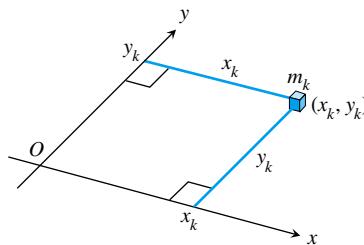
$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{πρώτη ροπή συστήματος ως προς την αρχή}}{\text{μάζα συστήματος}}.$$

Το σημείο  $\bar{x}$  καλείται **κέντρο μάζας** του συστήματος.

### Μάζες κατανεμημένες σε επίπεδο χωρίο

Θεωρήστε ένα πεπερασμένο πλήθος μαζών στο επίπεδο, με τη μάζα  $m_k$  στο σημείο  $(x_k, y_k)$  (δείτε το Σχήμα 12.17). Η μάζα του συστήματος είναι

$$\text{Μάζα συστήματος: } M = \sum m_k.$$



**ΣΧΗΜΑ 12.17** Κάθε μάζα  $m_k$  έχει πρώτη ροπή ως προς κάθε άξονα.

Κάθε μάζα  $m_k$  διαθέτει μια πρώτη ροπή ως προς κάθε άξονα. Η πρώτη ροπή της μάζας ως προς τον άξονα  $x$  είναι  $m_k y_k$ , ενώ ως προς τον άξονα  $y$  είναι  $m_k x_k$ . Οι πρώτες ροπές του συστήματος ως προς τους δύο άξονες είναι

$$\text{Πρώτη ροπή ως προς τον άξονα } x: M_x = \sum m_k y_k,$$

$$\text{Πρώτη ροπή ως προς τον άξονα } y: M_y = \sum m_k x_k.$$

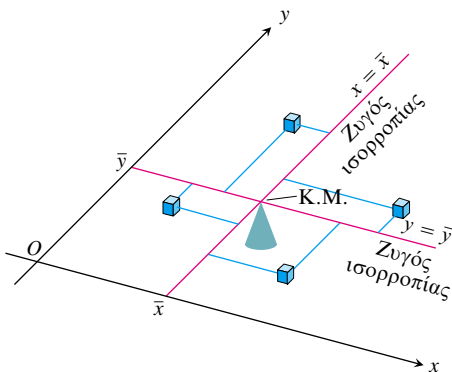
Η συντεταγμένη  $\bar{x}$  του κέντρου μάζας του συστήματος ορίζεται ως

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \quad (4)$$

Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, το σύστημα ισορροπεί ως προς την ευθεία  $x = \bar{x}$  (Σχήμα 12.18).

Η συντεταγμένη  $\bar{y}$  του κέντρου μάζας του συστήματος ορίζεται ως

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \quad (5)$$



**ΣΧΗΜΑ 12.18** Μια διάταξη μαζών σε δύο διαστάσεις ισορροπεί στο κέντρο μάζας της.

Το σύστημα ισορροπεί και ως προς την ευθεία  $y = \bar{y}$ . Οι ροπές βαρύτητας τις οποίες ασκούν οι μάζες ως προς την ευθεία  $y = \bar{y}$  αλληλοαναιρούνται. Δηλαδή, σε ό,τι αφορά την ισορροπία, το σύστημα συμπεριφέρεται σαν όλη η μάζα του να ήταν συγκεντρωμένη στο σημείο  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Το σημείο αυτό καλείται **κέντρο μάζας του συστήματος**.

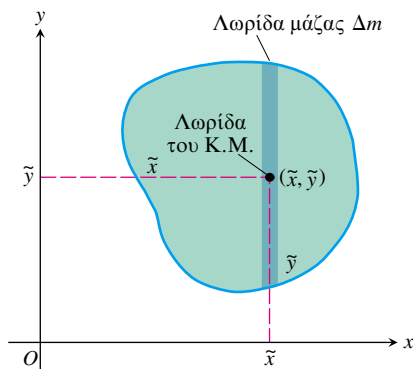
### Λεπτά και επίπεδα στρώματα με συνεχή κατανομή μάζας

Σε αρκετές εφαρμογές μάς ενδιαφέρει να βρούμε το κέντρο μάζας ενός λεπτού, επίπεδου στρώματος, π.χ. ενός δίσκου από αλουμίνιο, ή ενός ατσάλινου τριγωνικού πλακιδίου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, θεωρούμε ότι η κατανομή μάζας είναι συνεχής, και συνεπώς οι τύποι που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των  $\bar{x}$  και  $\bar{y}$  περιέχουν ολοκληρώματα αντί για πεπερασμένα αθροίσματα. Τα ολοκληρώματα προκύπτουν ως ακολούθως.

Θεωρήστε ότι το στρώμα καλύπτει μια περιοχή του επιπέδου  $xy$ ,

**Πυκνότητα**

Η πυκνότητα σώματος είναι η μάζα του ανά μονάδα όγκου. Στην πράξη, ωστόσο, χρησιμοποιούμε μονάδες που μπορούμε εύκολα να μετρήσουμε. Έτσι, όταν έχουμε να κάνουμε με σύρματα, ράβδους, και λεπτές λωρίδες, κάνουμε λόγο για μάζα ανά μονάδα μήκους (γραμμική πυκνότητα). Για λεπτά στρώματα, πάλι, χρησιμοποιούμε μάζα ανά μονάδα επιφάνειας (επιφανειακή πυκνότητα).



**ΣΧΗΜΑ 12.19** Ένα λεπτό στρώμα που «κόβουμε» σε λωρίδες παράλληλες στον άξονα  $y$ . Η πρώτη ροπή μιας τυπικής λωρίδας ως προς κάθε άξονα ισούται με τη ροπή που θα εξασκούσε η μάζα της λωρίδας  $\Delta m$  αν ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας της λωρίδας  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .



την οποία «κόβουμε» σε λεπτές λωρίδες παράλληλες προς έναν από τους δύο άξονες (στο Σχήμα 12.19, στον άξονα  $y$ ). Το κέντρο μάζας μιας τυπικής λωρίδας είναι  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Θεωρούμε ότι η μάζα  $\Delta m$  της λωρίδας αυτής βρίσκεται συγκεντρωμένη στο  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Η ροπή της λωρίδας ως προς τον άξονα  $y$  θα είναι  $\tilde{x} \Delta m$ . Η ροπή της λωρίδας ως προς τον άξονα  $x$  θα είναι  $\tilde{y} \Delta m$ . Οι Εξισώσεις (4) και (5) παίρνουν λοιπόν τη μορφή

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x} \Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y} \Delta m}{\sum \Delta m}.$$

Τα αθροίσματα που εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτές είναι τύπου Riemann και τείνουν στα αντίστοιχα ολοκληρώματα, καθώς οι λωρίδες γίνονται ολοένα και στενότερες. Γράφοντάς τα σε μορφή διπλών ολοκληρωμάτων μπορούμε να περιγράψουμε μια μεγάλη ποικιλία σχημάτων και πυκνοτήτων του φύλλου που εξετάζουμε. Η **μάζα** είναι το ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης πυκνότητας, που συμβολίζουμε εδώ ως  $\delta(x, y)$ . (Οι φυσικοί συμβολίζουν συχνά την πυκνότητα ως  $\rho(x, y)$ .) Οι τύποι της μάζας, των πρώτων ροπών, και του κέντρου μάζας δίνονται στον Πίνακα 12.1.

**Πίνακας 12.1** Τύποι μάζας και πρώτων ροπών για λεπτά στρώματα που καλύπτουν περιοχές του επιπέδου  $xy$

**Πυκνότητα:**  $\delta(x, y)$

**Μάζα:**  $M = \iint \delta(x, y) dA$

**Πρώτες ροπές:**  $M_x = \iint y \delta(x, y) dA, \quad M_y = \iint x \delta(x, y) dA$

**Κέντρο μάζας:**  $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

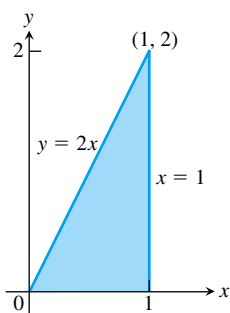
### Παράδειγμα 4 Εύρεση του κέντρου μάζας λεπτού στρώματος μεταβλητής πυκνότητας

Έστω λεπτό στρώμα που καλύπτει την τριγωνική περιοχή που φράσσεται από τον άξονα  $x$  και από τις ευθείες  $x = 1$  και  $y = 2x$  στο πρώτο τεταρτημόριο. Η πυκνότητα του στρώματος στο σημείο  $(x, y)$  είναι  $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ . Βρείτε τη μάζα του στρώματος, τις πρώτες ροπές του ως προς τους άξονες συντεταγμένων, και το κέντρο μάζας του.

**Λύση** Σχεδιάζουμε το στρώμα με ικανή λεπτομέρεια, ώστε να μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης των ολοκληρωμάτων που θα χρειαστούμε (Σχήμα 12.20).

Η μάζα του στρώματος είναι

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ 6xy + 3y^2 + 6y \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx = \left[ 8x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = 14. \end{aligned}$$



**ΣΧΗΜΑ 12.20** Η τριγωνική περιοχή την οποία καλύπτει το λεπτό στρώμα του Παραδείγματος 4.

Σημειώστε ότι ολοκληρώνουμε το γινόμενο  $y$  επί τη συνάρτηση πυκνότητας για να βρούμε το  $M_x$ , και αντίστοιχα, ολοκληρώνουμε το γινόμενο  $x$  επί την πυκνότητα για να βρούμε το  $M_y$ .

Η πρώτη ροπή ως προς τον άξονα  $x$  είναι

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ 3xy^2 + 2y^3 + 3y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2) dx \\ &= \left[ 7x^4 + 4x^3 \right]_0^1 = 11. \end{aligned}$$

Με παρόμοιο υπολογισμό βρίσκουμε τη ροπή ως προς τον άξονα  $y$ :

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x \delta(x, y) dy dx = 10.$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι συνεπώς

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}.$$

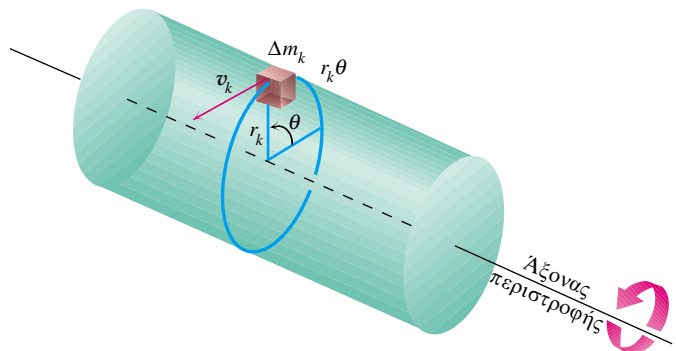
Σ.τ.Μ.: Για να ακριβολογούμε: οι πρώτες ροπές (όπως τις έχουν ορίσει οι συγγραφείς) αναφέρονται στην ισορροπία, και στην τάση για περιστροφή λόγω της βαρύτητας, συστημάτων με οριζόντια κατανομή μάζας τα οποία υπόκεινται σε ομοιόμορφο κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο.

### Ροπές αδρανείας

Οι πρώτες ροπές ενός σώματος (Πίνακας 12.1) μας πληροφορούν για την ισορροπία, και την τάση για περιστροφή ως προς διάφορους άξονες, ενός σώματος σε βαρυτικό πεδίο. Αν όμως το σώμα είναι ένας περιστρεφόμενος μηχανικός άξονας, για παράδειγμα, τότε είναι πιθανότερο να μας ενδιαφέρει πόση ενέργεια έχει αποθηκευτεί στον άξονα ή πόση ενέργεια απαιτείται για να τον περιστρέψουμε με δεδομένη γωνιακή ταχύτητα. Και εδώ είναι που κάνει την εμφάνισή της η δεύτερη ροπή, ή αλλιώς ροπή αδρανείας.

Θεωρήστε ότι διαμερίζουμε τον άξονα σε μικρά στοιχεία μάζας  $\Delta m_k$  και ότι το  $r_k$  συμβολίζει την απόσταση του κέντρου μάζας του  $k$ -στού στοιχείου από τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 12.21). Αν ο μηχανικός άξονας περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega = d\theta/dt$  ακτίνια το δευτερόλεπτο, τότε το κέντρο μάζας του στοιχείου θα διαγράφει την τροχιά του με γραμμική ταχύτητα μέτρου

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k \theta) = r_k \frac{d\theta}{dt} = r_k \omega.$$



**ΣΧΗΜΑ 12.21** Για να βρούμε το ολοκλήρωμα της ποσότητας της ενέργειας που αποθηκεύεται σε περιστρεφόμενο άξονα, θεωρούμε ότι ο άξονας διαμερίζεται σε πολλά μικρά τεμάχια. Κάθε τεμάχιο έχει τη δική του κινητική ενέργεια. Προσθέτουμε τις συνεισφορές από όλα τα επιμέρους τεμάχια για να βρούμε την κινητική ενέργεια όλου του άξονα.

Η κινητική ενέργεια του στοιχείου μάζας θα ισούται περίπου με

$$\frac{1}{2} \Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \Delta m_k (r_k \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k.$$

Έτσι η κινητική ενέργεια του μηχανικού άξονα θα ισούται περίπου με

$$\sum \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k.$$

Το ολοκλήρωμα στο οποίο τείνουν τα μερικά αυτά αθροίσματα καθώς διαμερίζουμε τον μηχανικό άξονα σε ολοένα και μικρότερα στοιχεία, μας δίνει την κινητική ενέργεια του άξονα:

$$KE_{\text{άξονα}} = \int \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm. \quad (6)$$

Ο παράγοντας

$$I = \int r^2 dm \quad (7)$$

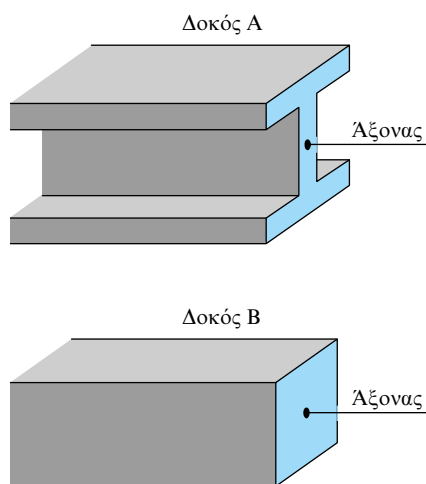
είναι η ροπή αδρανείας του μηχανικού άξονα ως προς τον άξονα περιστροφής του, οπότε από την Εξίσωση (6) βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια του μηχανικού άξονα θα είναι

$$KE_{\text{άξονα}} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (8)$$

Για να περιστρέψουμε με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  έναν μηχανικό άξονα του οποίου η ροπή αδρανείας είναι  $I$ , χρειάζεται να του δώσουμε κινητική ενέργεια  $KE = (1/2)I\omega^2$ . Ομοίως, για να σταματήσουμε την περιστροφή, χρειάζεται να αφαιρέσουμε το ίδιο ποσό ενέργειας από τον άξονα. Για να κινήσουμε ένα όχημα μάζας  $m$  με γραμμική ταχύτητα  $v$ , χρειάζεται να του δώσουμε κινητική ενέργεια  $KE = (1/2)mv^2$ . Για να το σταματήσουμε, πρέπει να αφαιρέσουμε από το όχημα το ίδιο ποσό ενέργειας. Η ροπή αδρανείας του μηχανικού άξονα είναι λοιπόν το «περιστροφικό ανάλογο» της μάζας του οχήματος. Η ροπή αδρανείας είναι η αιτία της καταβολής προσπάθειας για την έναρξη και τον τερματισμό της περιστροφής του μηχανικού άξονα. Όπως βλέπουμε και από την Εξίσωση (7), η ροπή αδρανείας εμπεριέχει την πληροφορία όχι μόνο της μάζας του περιστρεφόμενου σώματος, αλλά και του τρόπου κατανομής της.

Η ροπή αδρανείας παίζει επίσης ρόλο στον καθορισμό του πόσο θα καμφθεί μια οριζόντια δοκός πάνω στην οποία έχουμε κατανείμει φορτίο. Η σκληρότητα της δοκού ισούται με μια σταθερά επί τη ροπή αδρανείας  $I$  (ως προς τον επιμήκη άξονα της δοκού) μιας τυπικής εγκάρσιας διατομής. Όσο μεγαλύτερο είναι το  $I$ , τόσο πιο δύσκαμπτη (σκληρή) είναι η δοκός, και άρα τόσο λιγότερο θα κάμπτεται υπό δεδομένο φορτίο. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε δοκούς με διατομές σχήματος  $I$  αντί για δοκούς με τετράγωνες διατομές. Τα «πέλματα» στο πάνω και κάτω μέρος της δοκού κρατούν το μεγαλύτερο μέρος της μάζας μακριά από τον επιμήκη άξονα της δοκού, μεγιστοποιώντας έτσι την τιμή του  $I$  (Σχήμα 12.22).

Αν θέλετε μια «απτή» αίσθηση της ροπής αδρανείας, δοκιμάστε το ακόλουθο πείραμα. Κολλήστε με σελοτέιπ δύο κέρματα στα άκρα ενός μολυβιού και περιστρέψτε το μολύβι ως προς το κέντρο μάζας του. Η ροπή αδρανείας ευθύνεται για την αντίσταση που νιώθετε κάθε φορά που μεταβάλλετε τη φορά κίνησης. Τώρα μετατοπίστε τα κέρματα κατά ίση απόσταση προς το κέντρο μάζας και περιστρέψτε πάλι το μολύβι. Το σύστημα έχει την ίδια μάζα και το ίδιο κέντρο μάζας με πριν, αλλά τώρα αντιστέκεται λιγότερο σε μεταβολές της κίνησης. Η ροπή αδρανείας έχει μειωθεί. Η αίσθηση που έχουμε όταν κρατάμε ένα ρόπαλο του μπέιζμπολ, ή ένα μπαστούνι του γκολφ, ή μια ρακέτα του τέ-



**ΣΧΗΜΑ 12.22** Όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδρανείας της διατομής της δοκού ως προς τον επιμήκη άξονά της, τόσο πιο δύσκαμπτη είναι η δοκός. Οι δοκοί Α και Β έχουν το ίδιο εμβαδόν διατομής, αλλά η Α είναι πιο δύσκαμπτη.

νις, οφείλεται στη ροπή αδρανείας. Δύο ρακέτες του τένις με το ίδιο βάρος, το ίδιο σχήμα, και το ίδιο κέντρο μάζας θα δημιουργούν διαφορετική αίσθηση στο χέρι μας και θα έχουν διαφορετική συμπεριφορά αν οι μάζες τους είναι κατανομημένες με διαφορετικό τρόπο.

Ο Πίνακας 12.2 δίνει τους τύπους των ροπών αδρανείας (που καλούνται και δεύτερες ροπές) και των ακτίνων αδρανείας.

**Πίνακας 12.2** Τύποι δεύτερων ροπών για λεπτά στρώματα που βρίσκονται στο επίπεδο  $xy$

**Ροπές αδρανείας (δεύτερες ροπές):**

$$\text{Ως προς τον άξονα } x: \quad I_x = \iint y^2 \delta(x, y) \, dA \quad \text{Ως προς την αρχή} \quad I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) \, dA = I_x + I_y \quad (\text{πολική ροπή}):$$

$$\text{Ως προς τον άξονα } y: \quad I_y = \iint x^2 \delta(x, y) \, dA$$

$$\text{Ως προς την ευθεία } L: \quad I_L = \iint r^2(x, y) \delta(x, y) \, dA, \quad \text{όπου } r(x, y) = \text{απόσταση του } (x, y) \text{ από την } L$$

**Ακτίνες αδρανείας:**

$$\text{Ως προς τον άξονα } x: \quad R_x = \sqrt{I_x/M}$$

$$\text{Ως προς τον άξονα } y: \quad R_y = \sqrt{I_y/M}$$

$$\text{Ως προς την αρχή:} \quad R_0 = \sqrt{I_0/M}$$

Σ.τ.Μ.: Χρησιμοποιούμε τον όρο «ακτίνα αδρανείας» για να αποδώσουμε το «radius of gyration». Στα ελληνικά έχει επίσης χρησιμοποιηθεί ο όρος «ακτίνα περιστροφής», που πιστεύουμε όμως ότι είναι ατυχής, αφού αδυνατεί να απομονώσει από όλες τις δυνατές ακτίνες περιστροφής εκείνη που αντιστοιχεί στη ροπή αδρανείας ως προς τον εκάστοτε άξονα ή σημείο. Ως εναλλακτικός όρος έχει επίσης προταθεί το «ακτίνα γυροβολής» (απόδοση κατά λέξη από το gyration), που όμως πιστεύουμε ότι είναι εξεζητημένος. Καταλήγουμε έτσι, εδώ, να προτείνουμε τον όρο «ακτίνα αδρανείας» και να παρακολουθήσουμε εν συνεχεία την αποδοχή ή την απόρριψή του από την επιστημονική κοινότητα.

Η μαθηματική διαφορά μεταξύ των **πρώτων ροπών**  $M_x$  και  $M_y$  και των **ροπών αδρανείας**, ή **δεύτερων ροπών**,  $I_x$  και  $I_y$ , είναι ότι οι δεύτερες ροπές περιλαμβάνουν τα τετράγωνα των «μοχλοβραχιόνων»  $x$  και  $y$ .

Η ροπή  $I_0$  καλείται και **πολική ροπή** αδρανείας (εφόσον υπολογίζεται ως προς την αρχή). Ο υπολογισμός της γίνεται αν ολοκληρώσουμε το γινόμενο της πυκνότητας  $\delta(x, y)$  (μάζα ανά μονάδα εμβαδού) επί την ποσότητα  $r^2 = x^2 + y^2$ , που είναι το τετράγωνο της απόστασης του σημείου  $(x, y)$  από την αρχή. Σημειώστε ότι  $I_0 = I_x + I_y$ : έτσι, μόλις βρούμε δύο από τις ροπές αυτές, αυτομάτως ξέρουμε και την τρίτη. (Η ροπή  $I_0$  συμβολίζεται ενίοτε και ως  $I_z$ , δηλ. η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$ . Η ταυτότητα  $I_z = I_x + I_y$  καλείται και **θεώρημα κάθετων αξόνων**.)

Η **ακτίνα αδρανείας**  $R_x$  ορίζεται από την εξίσωση

$$I_x = MR_x^2.$$

Η ποσότητα αυτή μας λέει σε πόση απόσταση από τον άξονα  $x$  θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε συγκεντρωμένη όλη τη μάζα του φύλλου, ώστε να πάρουμε το ίδιο  $I_x$ . Η ακτίνα αδρανείας μας δίνει έναν ευχερή τρόπο έκφρασης της ροπής αδρανείας ως γινόμενο μάζας επί μήκος στο τετράγωνο. Οι ακτίνες  $R_y$  και  $R_0$  ορίζονται παρομοίως, δηλαδή

$$I_y = MR_y^2 \quad \text{και} \quad I_0 = MR_0^2.$$

Παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες των ποσοτήτων αυτών βρίσκουμε τους τύπους του Πίνακα 12.2.

**Παράδειγμα 5** Εύρεση ροπών αδρανείας και ακτίνων αδρανείας

Για το λεπτό στρώμα του Παραδείγματος 4 (Σχήμα 12.20), βρείτε τις ροπές αδρανείας και τις ακτίνες αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων και ως προς την αρχή.



Σημειώστε ότι για τον υπολογισμό του  $I_x$  ολοκληρώνουμε το γινόμενο του  $y^2$  επί την πυκνότητα, ενώ για τον υπολογισμό του  $I_y$  ολοκληρώνουμε το γινόμενο του  $x^2$  επί την πυκνότητα.

**Λύση** Αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας  $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$  από το Παράδειγμα 4, η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$  είναι

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ 2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx \\ &= [8x^5 + 4x^4]_0^1 = 12. \end{aligned}$$

Ομοίως, η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  είναι

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y) dy dx = \frac{39}{5}.$$

Γνωρίζοντας τα  $I_x$  και  $I_y$ , δεν χρειάζεται να ολοκληρώσουμε για να βρούμε το  $I_0$ : μπορούμε απλώς να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση  $I_0 = I_x + I_y$ :

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}.$$

Οι τρεις ακτίνες αδρανείας είναι

$$R_x = \sqrt{I_x/M} = \sqrt{12/14} = \sqrt{6/7} \approx 0,93$$

$$R_y = \sqrt{I_y/M} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{39/70} \approx 0,75$$

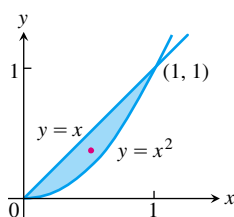
$$R_0 = \sqrt{I_0/M} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{99/70} \approx 1,19.$$

### Κεντροειδή γεωμετρικών σχημάτων

Όταν η πυκνότητα ενός σώματος είναι σταθερή, απαλείφεται από τον αριθμητή και τον παρονομαστή στους τύπους των  $\bar{x}$  και  $\bar{y}$ . Δηλαδή, όσον αφορά τα  $\bar{x}$  και  $\bar{y}$ , το  $\delta$  θα μπορούσε και να ισούται με 1. Με άλλα λόγια, όταν το  $\delta$  είναι σταθερό, η θέση του κέντρου μάζας γίνεται χαρακτηριστικό του σχήματος του σώματος και όχι του υλικού από το οποίο αυτό είναι φτιαγμένο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι μηχανικοί αποκαλούν συχνά το κέντρο μάζας ως το **κεντροειδές** του δεδομένου σχήματος. Για να βρούμε το κεντροειδές, θέτουμε το  $\delta$  ίσο με 1 και υπολογίζουμε εν συνεχεία τα  $\bar{x}$  και  $\bar{y}$  όπως και πριν, διαιρώντας τις πρώτες ροπές με τις μάζες.

### Παράδειγμα 6 Εύρεση κεντροειδούς ενός χωρίου

Βρείτε το κεντροειδές του χωρίου στο πρώτο τεταρτημόριο που είναι άνω φραγμένο από την ευθεία  $y = x$  και κάτω φραγμένο από την παραβολή  $y = x^2$ .



**ΣΧΗΜΑ 12.23** Στο Παράδειγμα 6 υπολογίζουμε τη θέση του κεντροειδούς του χωρίου του σχήματος.

**Λύση** Σχεδιάζουμε το χωρίο και περιλαμβάνουμε ικανή λεπτομέρεια στο σχήμα μας ώστε να μπορούμε από αυτό να προσδιορίσουμε

τα όρια ολοκλήρωσης (Σχήμα 12.23). Κατόπιν θέτουμε το  $\delta$  ίσο με 1 και υπολογίζουμε τις ποσότητες του Πίνακα 12.1:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^x y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{15} \\ M_y &= \int_0^1 \int_{x^2}^x x \, dy \, dx = \int_0^1 [xy]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Από τις τιμές αυτές των  $M$ ,  $M_x$ , και  $M_y$ , βρίσκουμε

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}.$$

Το κεντροειδές λοιπόν είναι το σημείο  $(1/2, 2/5)$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.2

### Υπολογισμός εμβαδού με διπλή ολοκλήρωση

Στις Ασκήσεις 1-8, σχεδιάστε την περιοχή που φράσσεται από τις ευθείες και τις καμπύλες που δίνονται. Κατόπιν, εκφράστε το εμβαδόν της περιοχής ως διπλό ολοκλήρωμα, και υπολογίστε το.

1. Οι άξονες συντεταγμένων και η ευθεία  $x + y = 2$
2. Οι ευθείες  $x = 0$ ,  $y = 2x$ , και  $y = 4$
3. Η παραβολή  $x = -y^2$  και η ευθεία  $y = x + 2$
4. Η παραβολή  $x = y - y^2$  και η ευθεία  $y = -x$
5. Η καμπύλη  $y = e^x$  και οι ευθείες  $y = 0$ ,  $x = 0$ , και  $x = \ln 2$
6. Οι καμπύλες  $y = \ln x$  και  $y = 2 \ln x$  και η ευθεία  $x = e$ , στο πρώτο τεταρτημόριο
7. Οι παραβολές  $x = y^2$  και  $x = 2y - y^2$
8. Οι παραβολές  $x = y^2 - 1$  και  $x = 2y^2 - 2$

### Περιοχή ολοκλήρωσης

Τα ολοκληρώματα και τα αθροίσματα ολοκληρωμάτων των Ασκήσεων 9-14 εκφράζουν τα εμβαδά περιοχών του επιπέδου  $xy$ . Σχεδιάστε κάθε περιοχή, ονομάστε κάθε συνοριακή καμπύλη της περιοχής με την εξίσωσή της, και βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των καμπυλών. Στη συνέχεια, βρείτε το εμβαδόν κάθε περιοχής.

9.  $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} dx \, dy$
10.  $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy \, dx$
11.  $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy \, dx$
12.  $\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx \, dy$
13.  $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy \, dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy \, dx$
14.  $\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy \, dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy \, dx$

### Μέσες τιμές

15. Βρείτε τη μέση τιμή της  $f(x, y) = \sin(x + y)$  στο  
(α) ορθογώνιο χωρίο  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi$   
(β) ορθογώνιο χωρίο  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$
16. Ποια από τις δύο ποσότητες πιστεύετε ότι είναι μεγαλύτερη, η μέση τιμή της  $f(x, y) = xy$  στο τετραγωνικό χωρίο  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , ή η μέση τιμή της  $f$  στο τεταρτοκύκλιο  $x^2 + y^2 \leq 1$  του πρώτου τεταρτημορίου; Υπολογίστε και τις δύο για να το μάθετε.
17. Βρείτε το μέσο ύψος του παραβολοειδούς  $z = x^2 + y^2$  στο τετραγωνικό χωρίο  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .
18. Βρείτε τη μέση τιμή της  $f(x, y) = 1/(xy)$  στο τετραγωνικό χωρίο  $\ln 2 \leq x \leq 2 \ln 2$ ,  $\ln 2 \leq y \leq 2 \ln 2$ .

### Σταθερή πυκνότητα

19. **Εύρεση κέντρου μάζας** Βρείτε το κέντρο μάζας ενός λεπτού στρώματος πυκνότητας  $\delta = 3$  που φράσσεται από τις ευθείες  $x = 0$ ,  $y = x$ , και από την παραβολή  $y = 2 - x^2$  στο πρώτο τεταρτημόριο.
20. **Εύρεση ροπών αδρανείας και ακτίνων αδρανείας** Βρείτε τις ροπές αδρανείας και τις ακτίνες αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων ενός λεπτού ορθογωνίου στρώματος σταθερής πυκνότητας  $\delta$  που φράσσεται από τις ευθείες  $x = 3$  και  $y = 3$  στο πρώτο τεταρτημόριο.
21. **Εύρεση κεντροειδούς** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από τον άξονα  $x$ , από την παραβολή  $y^2 = 2x$ , και από την ευθεία  $x + y = 4$ .
22. **Εύρεση κεντροειδούς** Βρείτε το κεντροειδές της τριγωνικής περιοχής την οποία αποκόπτεται από το πρώτο τεταρτημόριο η ευθεία  $x + y = 3$ .
23. **Εύρεση κεντροειδούς** Βρείτε το κεντροειδές της ημικυκλικής περιοχής που φράσσεται από τον άξονα  $x$  και από την καμπύλη  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

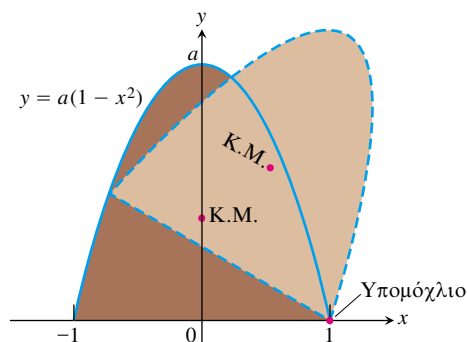
24. **Εύρεση κεντροειδούς** Το εμβαδόν της περιοχής του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από την παραβολή  $y = 6x - x^2$  και από την ευθεία  $y = x$  είναι  $125/6$  τετραγωνικές μονάδες. Βρείτε το κεντροειδές.
25. **Εύρεση κεντροειδούς** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής την οποία αποκόπτει από το πρώτο τεταρτημόριο ο κύκλος  $x^2 + y^2 = a^2$ .
26. **Εύρεση κεντροειδούς** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής που περικλείεται μεταξύ του άξονα  $x$  και της καμπύλης  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .
27. **Εύρεση ροπών αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$  του λεπτού στρώματος πυκνότητας  $\delta = 1$  που φράσσεται από τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 4$ . Εν συνεχεία χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα σας για να βρείτε τα  $I_y$  και  $I_0$ .
28. **Εύρεση ροπής αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  του λεπτού στρώματος σταθερής πυκνότητας  $\delta = 1$  που φράσσεται από την καμπύλη  $y = (\sin^2 x)/x^2$  και από το διάστημα  $\pi \leq x \leq 2\pi$  στον άξονα  $x$ .
29. **Κεντροειδές άπειρης περιοχής** Βρείτε το κεντροειδές της άπειρης περιοχής του πρώτου τεταρτημορίου που περικλείεται από τους άξονες συντεταγμένων και από την καμπύλη  $y = e^x$ . (Χρησιμοποιήστε γενικευμένα ολοκληρώματα στους τύπους μάζας και πρώτης ροπής.)
30. **Πρώτη ροπή άπειρου στρώματος** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  του λεπτού στρώματος πυκνότητας  $\delta(x, y) = 1$  που καλύπτει την άπειρη περιοχή κάτω από την καμπύλη  $y = e^{-x^2/2}$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

## Μεταβαλλόμενη πυκνότητα

31. **Εύρεση ροπής αδρανείας και ακτίνας αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$  ενός λεπτού στρώματος που φράσσεται από την παραβολή  $x = y - y^2$  και την ευθεία  $x + y = 0$ , αν  $\delta(x, y) = x + y$ .
32. **Εύρεση μάζας** Βρείτε τη μάζα ενός λεπτού στρώματος που καλύπτει τη μικρότερη περιοχή την οποία αποκόπτει από την έλλειψη  $x^2 + 4y^2 = 12$  η παραβολή  $x = 4y^2$ , αν  $\delta(x, y) = 5x$ .
33. **Εύρεση κέντρου μάζας** Βρείτε το κέντρο μάζας μιας λεπτής τριγωνικής πλάκας που φράσσεται από τον άξονα  $y$  και από τις ευθείες  $y = x$  και  $y = 2 - x$ , αν  $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$ .
34. **Εύρεση κέντρου μάζας και ροπής αδρανείας** Βρείτε το κέντρο μάζας και τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$  μιας λεπτής πλάκας που φράσσεται από τις καμπύλες  $x = y^2$  και  $x = 2y - y^2$ , αν η πυκνότητα στο σημείο  $(x, y)$  είναι  $\delta(x, y) = y + 1$ .
35. **Κέντρο μάζας, ροπή αδρανείας, και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  της λεπτής ορθογώνιας πλάκας που αποκόπτουν από το πρώτο τεταρτημόριο οι ευθείες  $x = 6$  και  $y = 1$ , αν  $\delta(x, y) = x + y + 1$ .
36. **Κέντρο μάζας, ροπή αδρανείας, και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  της λεπτής πλάκας που φράσσεται από την ευθεία  $y = 1$  και από την παραβολή  $y = x^2$ , αν η πυκνότητα είναι  $\delta(x, y) = y + 1$ .
37. **Κέντρο μάζας, ροπή αδρανείας, και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  της λεπτής πλάκας που φράσσεται από τον άξονα  $x$ , από τις ευθείες  $x = \pm 1$ , και από την παραβολή  $y = x^2$ , αν  $\delta(x, y) = 7y + 1$ .
38. **Κέντρο μάζας, ροπή αδρανείας, και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  της λεπτής ορθογώνιας πλάκας που φράσσεται από τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 20$ ,  $y = -1$ , και  $y = 1$ , αν  $\delta(x, y) = 1 + (x/20)$ .
39. **Κέντρο μάζας, ροπές αδρανείας, και ακτίνες αδρανείας** Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και τις ακτίνες αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων, καθώς και ως προς την αρχή της λεπτής τριγωνικής πλάκας που φράσσεται από τις ευθείες  $y = x$ ,  $y = -x$ , και  $y = 1$ , αν  $\delta(x, y) = y + 1$ .
40. **Κέντρο μάζας, ροπές αδρανείας, και ακτίνες αδρανείας** Επαναλάβετε την Άσκηση 39 για  $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ .

## Θεωρία και παραδείγματα

41. **Βακτηριακός πληθυσμός** Αν η  $f(x, y) = (10.000e^y)/(1 + |x|/2)$  αντιπροσωπεύει την πυκνότητα πληθυσμού βακτηριών κάποιου είδους πάνω στο επίπεδο  $xy$ , όπου τα  $x$  και  $y$  μετρώνται σε cm, βρείτε τον συνολικό πληθυσμό βακτηριών στην ορθογώνια περιοχή  $-5 \leq x \leq 5$  επί  $-2 \leq y \leq 0$ .
42. **Πληθυσμός μιας περιοχής** Αν η  $f(x, y) = 100(y + 1)$  αντιπροσωπεύει την πυκνότητα πληθυσμού σε μια επίπεδη περιοχή της Γης, όπου τα  $x$  και  $y$  μετρώνται σε km, βρείτε τον συνολικό πληθυσμό στην περιοχή που φράσσεται από τις καμπύλες  $x = y^2$  και  $x = 2y - y^2$ .
43. **Σχεδίαση συσκευής** Κατά τη σχεδίαση των οικιακών συσκευών που χρησιμοποιούμε, ένα από τα σημεία που προσέχουν οι κατασκευαστές είναι το πόσο εύκολα αναποδογυρίζει κανείς τη συσκευή γέρνοντάς την στο πλάι. Η συσκευή θα τείνει να επανέλθει στην όρθια θέση εφόσον το κέντρο μάζας της κείται από τη «σωστή» πλευρά του υπομοχλίου, δηλ. του σημείου ως προς το οποίο αρχίζει η συσκευή να περιστρέφεται καθώς τη γέρνουμε. Έστω ότι μια συσκευή περίπου σταθερής πυκνότητας έχει παραβολικό σχήμα, όπως τα παλιά ραδιόφωνα. Καλύπτει λοιπόν το χωρίο  $0 \leq y \leq a(1 - x^2)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , στο επίπεδο  $xy$  (δείτε το σχήμα). Για ποιες τιμές του  $a$  μπορούμε να εγγυηθούμε ότι η συσκευή δεν θα ανατραπεί παρά μονάχα αν τη γείρουμε περισσότερο από  $45^\circ$ ;



44. **Ελαχιστοποίηση ροπής αδρανείας** Μια ορθογώνια πλάκα σταθερής πυκνότητας  $\delta(x, y) = 1$  καλύπτει το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες  $x = 4$  και  $y = 2$  στο πρώτο τεταρτημόριο. Η ροπή αδρανείας  $I_a$  της πλάκας ως προς την ευθεία  $y = a$  δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 dy dx.$$

Βρείτε την τιμή του  $a$  που ελαχιστοποιεί το  $I_a$ .

45. **Κεντροειδές μη φραγμένου χωρίου** Βρείτε το κεντροειδές του άπειρου χωρίου του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τις καμπύλες  $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ ,  $y = -1/\sqrt{1-x^2}$ , και από τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$ .
46. **Ακτίνα αδρανείας λεπτής ράβδου** Βρείτε την ακτίνα αδρανείας μιας λεπτής ράβδου σταθερής γραμμικής πυκνότητας  $\delta$  gm/cm και μήκους  $L$  cm ως προς άξονα:
- (α) που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου κάθετα στον άξονα της ράβδου
- (β) που είναι κάθετος στον άξονα της ράβδου και διέρχεται από το ένα της άκρο.
47. (Συνέχεια της Άσκησης 34) Μια λεπτή πλάκα σταθερής πυκνότητας  $\delta$  καλύπτει το χωρίο  $R$  του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τις καμπύλες  $x = y^2$  και  $x = 2y - y^2$ .
- (α) **Σταθερή πυκνότητα** Βρείτε το  $\delta$  έτσι ώστε η πλάκα να έχει την ίδια μάζα με την πλάκα της Άσκησης 34.
- (β) **Μέση τιμή** Συγκρίνετε την τιμή του  $\delta$  που βρήκατε στο (α) με τη μέση τιμή της  $\delta(x, y) = y + 1$  στο χωρίο  $R$ .
48. **Μέση θερμοκρασία στο Τέξας** Σύμφωνα με το περιοδικό *Texas Almanac*, η Πολιτεία του Texas έχει 254 κομητείες, σε καθεμία εκ των οποίων λειτουργεί και ένας μετεωρολογικός σταθμός. Έστω ότι τη χρονική στιγμή  $t_0$ , καθένας από τους 254 σταθμούς καταγράφει την τοπική θερμοκρασία. Βρείτε έναν τύπο που θα έδινε μια λογική προσέγγιση της μέσης θερμοκρασίας στο Τέξας τη στιγμή  $t_0$ . Η απάντησή σας θα πρέπει να κάνει χρήση δεδομένων που θα ήταν εύλογο να υπάρχουν στο *Texas Almanac*.

## Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

Έστω  $L_{κ.μ.}$  μια ευθεία του επιπέδου  $xy$  που διέρχεται από το κέντρο μάζας λεπτής πλάκας που έχει μάζα  $m$  και καλύπτει ένα χωρίο του επιπέδου. Έστω  $L$  μια ευθεία του επιπέδου παράλληλη στην  $L_{κ.μ.}$  και απέχουσα απόσταση  $h$  από αυτήν. Το **θεώρημα των παράλληλων αξόνων** λέει ότι στην περίπτωση αυτή, οι ροπές αδρανείας  $I_L$  και  $I_{κ.μ.}$  της πλάκας ως προς τις ευθείες  $L$  και  $L_{κ.μ.}$  θα ικανοποιούν την εξίσωση

$$I_L = I_{κ.μ.} + mh^2.$$

Η εξίσωση αυτή παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού της μίας ροπής όταν η άλλη ροπή και η μάζα είναι γνωστές.

49. **Απόδειξη του θεωρήματος των παράλληλων αξόνων**

- (α) Δείξτε ότι η πρώτη ροπή μιας λεπτής επίπεδης πλάκας ως προς οποιαδήποτε ευθεία (του επιπέδου της πλάκας) η οποία διέρχεται από το κέντρο μάζας της, θα ισούται με μηδέν. (Υπόδειξη: Τοποθετήστε το κέντρο μάζας στην αρχή των αξόνων, και

την ευθεία κατά μήκος του άξονα  $y$ . Τι σας λέει τώρα ο τύπος  $\bar{x} = M_y/M$ ;) )

- (β) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα σας στο ερώτημα (α) για να δείξετε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων. Υποθέστε ότι οι άξονες έχουν οριστεί έτσι ώστε η ευθεία  $L_{κ.μ.}$  να συμπίπτει με τον άξονα  $y$  και η ευθεία  $L$  να συμπίπτει με την ευθεία  $x = h$ . Εν συνεχεία αναπτύξτε την ολοκληρωτέα ποσότητα του ολοκληρώματος της  $I_L$  ώστε να ξαναγράψετε το ολοκλήρωμα σε μορφή αθροίσματος ολοκληρωμάτων των οποίων τις τιμές γνωρίζετε.

50. **Εύρεση ροπών αδρανείας**

- (α) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα παράλληλων αξόνων και τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 4 για να βρείτε τις ροπές αδρανείας της πλάκας του Παραδείγματος 4, ως προς τις κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο μάζας της πλάκας.
- (β) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματά σας στο ερώτημα (α) για να βρείτε τις ροπές αδρανείας ως προς τις ευθείες  $x = 1$  και  $y = 2$ .

## Τύπος του Πάππου

Ο Πάππος γνώριζε ότι το κεντροειδές της ένωσης δύο μη αλληλεπικαλυπτόμενων επίπεδων χωρίων ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο επιμέρους κεντροειδή. Αναλυτικότερα, έστω ότι  $m_1$  και  $m_2$  είναι οι μάζες των λεπτών πλακών  $P_1$  και  $P_2$  που καλύπτουν δύο μη αλληλεπικαλυπτόμενα χωρία του επιπέδου  $xy$ . Έστω  $c_1$  και  $c_2$  τα διανύσματα από την αρχή έως τα αντίστοιχα κέντρα μάζας των  $P_1$  και  $P_2$ . Στην περίπτωση αυτή το κέντρο μάζας της ένωσης  $P_1 \cup P_2$  των δύο πλακών δίνεται από το διάνυσμα

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

Η Εξίσωση (9) είναι γνωστή ως ο **τύπος του Πάππου**. Για περισσότερες από δύο (αλλά πεπερασμένου πλήθους) μη αλληλεπικαλυπτόμενες πλάκες, ο τύπος μπορεί να γενικευθεί:

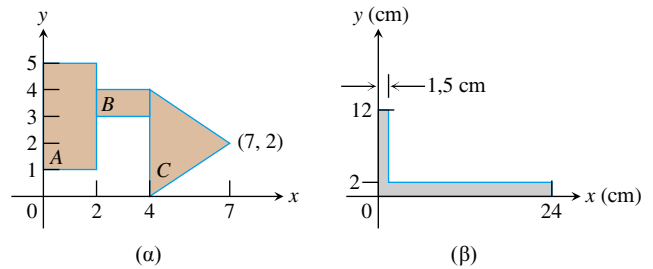
$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \cdots + m_n c_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \quad (10)$$

Ο τύπος αυτός βρίσκει εφαρμογή στην εύρεση του κεντροειδούς μιας πλάκας ακανόνιστου σχήματος που αποτελείται από διαφορετικά μέρη σταθερής πυκνότητας των οποίων τα κεντροειδή γνωρίζουμε από τη γεωμετρία. Αφού βρούμε το κεντροειδές κάθε μέρους, εφαρμόζουμε την Εξίσωση (10) για να βρούμε το κεντροειδές όλης της πλάκας.

51. Αποδείξτε τον τύπο του Πάππου (Εξίσωση (9)). (Υπόδειξη: Σχεδιάστε τις πλάκες ως χωρία του πρώτου τεταρτημορίου και ονομάστε τα κέντρα μάζας τους  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  και  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ . Ποιες είναι οι πρώτες ροπές της ένωσης  $P_1 \cup P_2$  ως προς τους αξόνες συντεταγμένων;)
52. Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση (9) και τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για να δείξετε ότι η Εξίσωση (10) ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο  $n > 2$ .
53. Έστω  $A$ ,  $B$ , και  $C$  τα σχήματα που υπάρχουν στο Σχήμα 12.24a. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Πάππου για να βρείτε το κεντροειδές του Σχήματος:

- (α)  $A \cup B$       (β)  $A \cup C$   
 (γ)  $B \cup C$       (δ)  $A \cup B \cup C$ .

54. **Εντοπισμός του κέντρου μάζας** Βρείτε το κέντρο μάζας του σχήματος που εικονίζεται στο Σχήμα 12.24β.
55. Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $T$  έχει βάση  $2a$  και ύψος  $h$ . Η βάση του κείται κατά μήκος της διαμέτρου του ημικυκλικού δίσκου  $D$  ακτίνας  $a$ , έτσι ώστε τα δύο σχήματα μαζί να θυμίζουν ...ένα παγωτό χωνάκι! Ποια σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ των  $a$  και  $h$  ώστε το κεντροειδές του  $T \cup D$  να βρίσκεται στο κοινό σύνορο των  $T$  και  $D$ ; Το ίδιο ερώτημα, για το κεντροειδές στο εσωτερικό του  $T$ .
56. Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $T$  ύψους  $h$  έχει για βάση του τη μία πλευρά ενός τετραγώνου  $Q$  του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος  $s$ . (Το τετράγωνο και το τρίγωνο δεν αλληλεπικαλύπτονται.) Ποια σχέση πρέπει να ισχύει



**ΣΧΗΜΑ 12.24** Τα σχήματα που αφορούν στις Ασκήσεις 53 και 54.

μεταξύ των  $h$  και  $s$  για να βρίσκεται το κεντροειδές του  $T \cup Q$  στη βάση του τριγώνου; Συγκρίνετε την απάντησή σας με αυτήν της Άσκησης 55.

## 12.3

### Διπλά ολοκληρώματα σε πολική μορφή

Ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες • Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης • Μετατροπή καρτεσιανών ολοκληρωμάτων σε πολικά ολοκληρώματα

Μερικές φορές ένα ολοκλήρωμα υπολογίζεται πιο εύκολα αν το εκφράσουμε σε πολικές συντεταγμένες. Στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς γίνεται η μετατροπή αυτή και πώς υπολογίζουμε ολοκληρώματα σε περιοχές των οποίων τα σύνορα δίνονται από πολικές εξισώσεις.

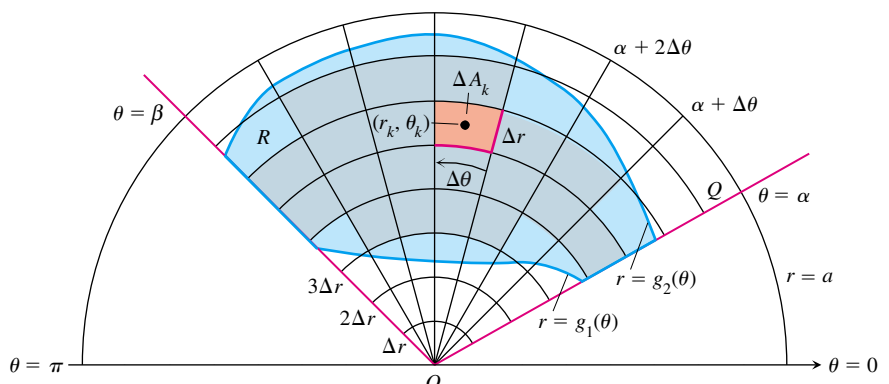
#### Ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες

Όταν ορίσαμε το διπλό ολοκλήρωμα συναρτήσεως σε χωρίο  $R$  του επιπέδου  $xy$ , χωρίσαμε πρώτα το  $R$  σε μικρά ορθογώνια χωρία των οποίων οι πλευρές ήταν παράλληλες με τους άξονες. Η επιλογή του ορθογώνιου σχήματος των χωρίων ήταν η πλέον φυσική, δεδομένου ότι τα χωρία αυτά είχαν πλευρές με σταθερό  $x$  ή  $y$ . Στις πολικές συντεταγμένες, το φυσικότερο σχήμα είναι ένα «πολικό ορθογώνιο» με πλευρές σταθερού  $r$  και σταθερού  $\theta$ .

Έστω ότι μια συνάρτηση  $f(r, \theta)$  είναι ορισμένη σε ένα χωρίο  $R$  που φράσσεται από τις πολικές ημιευθείες  $\theta = \alpha$  και  $\theta = \beta$  και από τις συνεχείς καμπύλες  $r = g_1(\theta)$  και  $r = g_2(\theta)$ . Έστω ακόμη ότι  $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$  για κάθε  $\theta$  μεταξύ των  $\alpha$  και  $\beta$ . Στην περίπτωση αυτή, το χωρίο  $R$  θα κείται στην περιοχή  $Q$  που ορίζεται από τις ανισότητες  $0 \leq r \leq a$  και  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ . Δείτε το Σχήμα 12.25.

Σ.τ.Μ.: Καλούμε **πολική** μια ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων (πόλο).

**ΣΧΗΜΑ 12.25** Το χωρίο  $R$ :  $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , περιέχεται στο χωρίο σχήματος βεντάλιας  $Q$ :  $0 \leq r \leq a$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ . Διαμερίζοντας το  $Q$  με κυκλικά τόξα και πολικές ημιευθείες, διαμερίζουμε ταυτόχρονα και το  $R$ .





Καλύπτουμε την περιοχή  $Q$  με ένα πλέγμα κυκλικών τόξων και πολικών ευθειών. Τα τόξα ανήκουν σε κύκλους με κέντρο στην αρχή, και με ακτίνες  $\Delta r, 2\Delta r, \dots, m\Delta r$ , όπου  $\Delta r = a/m$ . Οι πολικές ημιευθείες δίνονται από τις σχέσεις

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \alpha + \Delta\theta, \quad \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \quad \dots, \quad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta,$$

όπου  $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$ . Τα τόξα και οι πολικές ημιευθείες διαμερίζουν την περιοχή  $Q$  σε μικρότερα χωρία που καλούνται «πολικά ορθογώνια».

Αριθμούμε τα ορθογώνια που κείνται εντός του χωρίου  $R$  (δεν έχει σημασία με ποια σειρά τα παίρνουμε), καλώντας τα εμβαδά τους  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ .

Έστω  $(r_k, \theta_k)$  το κέντρο πολικού ορθογωνίου του οποίου το εμβαδόν είναι  $\Delta A_k$ . Λέγοντας «κέντρο», εννοούμε το σημείο που ισαπέχει από τα κυκλικά τόξα και κείται στην πολική ευθεία που τα διχοτομεί. Σχηματίζουμε κατόπιν το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) \Delta A_k. \quad (1)$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής παντού στο  $R$ , το άθροισμα αυτό θα τείνει σε κάποιο όριο καθώς πυκνώνουμε το πλέγμα ώστε τα  $\Delta r$  και  $\Delta\theta$  να τείνουν στο μηδέν. Το όριο καλείται διπλό ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $R$ . Γράφουμε λοιπόν,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(r, \theta) dA.$$

Για να υπολογίσουμε το όριο αυτό, θα πρέπει πρώτα να γράψουμε το άθροισμα  $S_n$  σε μορφή στην οποία το  $\Delta A_k$  είναι εκπεφρασμένο συναρτήσει των  $\Delta r$  και  $\Delta\theta$ . Η ακτίνα του εσωτερικού τόξου που ορίζει το  $\Delta A_k$  ισούται με  $r_k - (\Delta r/2)$  (Σχήμα 12.26). Η ακτίνα του εξωτερικού τόξου είναι  $r_k + (\Delta r/2)$ . Τα εμβαδά των κυκλικών τομέων τους οποίους ορίζουν τα τόξα αυτά είναι

$$\text{Εμβαδόν τομέα μικρής ακτίνας:} \quad \frac{1}{2} \left( r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta$$

$$\text{Εμβαδόν τομέα μεγάλης ακτίνας:} \quad \frac{1}{2} \left( r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta.$$

Συνεπώς,

$$\Delta A_k = \text{εμβαδόν μεγάλου τομέα} - \text{εμβαδόν μικρού τομέα}$$

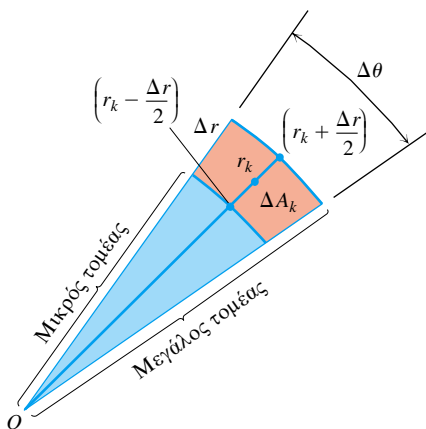
$$= \frac{\Delta\theta}{2} \left[ \left( r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] = \frac{\Delta\theta}{2} (2r_k \Delta r) = r_k \Delta r \Delta\theta.$$

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την Εξίσωση (1), βρίσκουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta.$$

Μια εκδοχή του θεωρήματος του Fubini μάς λέει ότι το όριο στο οποίο τείνουν τα αθροίσματα αυτά μπορεί να υπολογιστεί αν ολοκληρώσουμε διαδοχικά ως προς  $r$  και  $\theta$ , ως ακολούθως

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (2)$$



**ΣΧΗΜΑ 12.26** Αν παρατηρήσουμε ότι

$$\Delta A_k = \left( \text{εμβαδόν μεγάλου τομέα} \right) - \left( \text{εμβαδόν μικρού τομέα} \right)$$

καταλήγουμε στον τύπο  $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta\theta$ . Η εξήγηση δίνεται στο κείμενο.



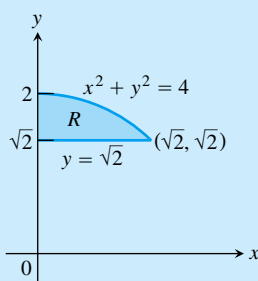
### Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Η ίδια διαδικασία εύρεσης ορίων ολοκλήρωσης που ακολουθήσαμε για ορθογώνιες συντεταγμένες ισχύει επίσης για πολικές συντεταγμένες.

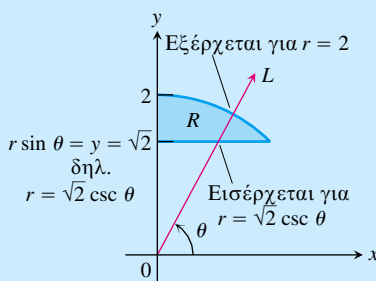
#### Πώς ολοκληρώνουμε σε πολικές συντεταγμένες

Προκειμένου να υπολογίσουμε το  $\iint_R f(r, \theta) dA$  σε ένα χωρίο  $R$  σε πολικές συντεταγμένες, ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς  $r$  και κατόπιν ως προς  $\theta$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα.

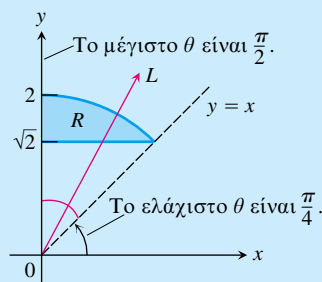
**Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα.** Κάνουμε ένα σχεδιάγραμμα του χωρίου και ονομάζουμε τις συνοριακές του καμπύλες.



**Βήμα 2: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $r$ .** Θεωρούμε μια πολική ημιευθεία  $L$  (με αφετηρία την αρχή των αξόνων) που τέμνει το χωρίο  $R$  δείχνοντας την κατεύθυνση αύξησης του  $r$ . Σημειώνουμε τις τιμές του  $r$  που αντιστοιχούν στα σημεία εισόδου και εξόδου της  $L$  στο  $R$ . Οι τιμές αυτές είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $r$ . Συνήθως εξαρτώνται από τη γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η  $L$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$ .

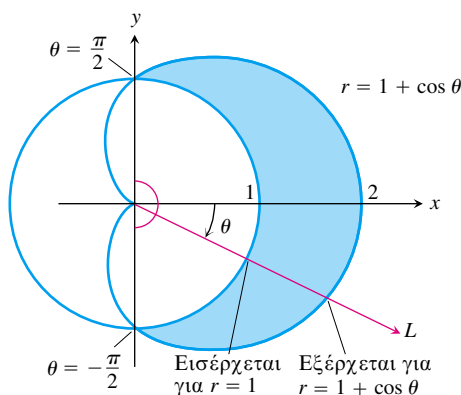


**Βήμα 3: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ .** Βρίσκουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή που παίρνει το  $\theta$  εντός του  $R$ . Οι τιμές αυτές είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ .



Το ολοκλήρωμα είναι

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r, \theta) r dr d\theta.$$



**ΣΧΗΜΑ 12.27** Το σχεδιάγραμμα αναφέρεται στο Παράδειγμα 1.

#### Παράδειγμα 1 Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης της  $f(r, \theta)$  στο χωρίο  $R$  που κείται εντός της καρδιοειδούς καμπύλης  $r = 1 + \cos \theta$  και εκτός του κύκλου  $r = 1$ .

#### Λύση

**Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα.** Σχεδιάζουμε το χωρίο και σημειώνουμε στο σχήμα τις συνοριακές καμπύλες (Σχήμα 12.27).

**Βήμα 2: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $r$ .** Μια τυπική πολική ημιευθεία (με αφετηρία την αρχή) εισέρχεται στο χωρίο  $R$  για  $r = 1$  και εξέρχεται για  $r = 1 + \cos \theta$ .

**Βήμα 3: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ .** Οι πολικές ημιευθείες με

αφετηρία την αρχή που τέμνουν το χωρίο  $R$  καλύπτουν τις τιμές από  $\theta = -\pi/2$  έως  $\theta = \pi/2$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

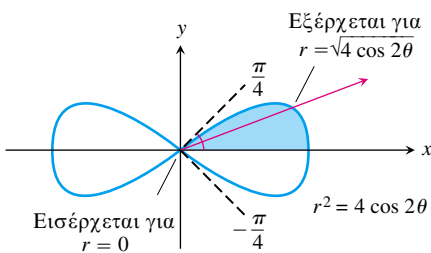
Αν η  $f(r, \theta)$  είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1, τότε το ολοκλήρωμα της  $f$  στο χωρίο  $R$  ισούται με το εμβαδόν του  $R$ .

### Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες

Το εμβαδόν κλειστού και φραγμένου χωρίου  $R$  στο πολικό επίπεδο είναι

$$A = \iint_R r dr d\theta. \quad (3)$$

Όπως είναι αναμενόμενο, αυτός ο τύπος του εμβαδού συμφωνεί με όλους τους προηγούμενους τύπους, πράγμα που δεχόμαστε εδώ χωρίς απόδειξη.



**ΣΧΗΜΑ 12.28** Για να ολοκληρώσουμε στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, δίνουμε στο  $r$  τιμές από 0 έως  $\sqrt{4 \cos 2\theta}$  και στο  $\theta$  από 0 έως  $\pi/4$ . (Παράδειγμα 2)

### Παράδειγμα 2 Εύρεση εμβαδού σε πολικές συντεταγμένες

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον λημνίσκο  $r^2 = 4 \cos 2\theta$ .

**Λύση** Σχεδιάζουμε τον λημνίσκο για να προσδιορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης (Σχήμα 12.28). Από το σχήμα φαίνεται ότι το συνολικό ζητούμενο εμβαδόν είναι τετραπλάσιο του εμβαδού που περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta d\theta = 4 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 4. \end{aligned}$$

### Μετατροπή καρτεσιανών ολοκληρωμάτων σε πολικά ολοκληρώματα

Η διαδικασία μετατροπής ενός καρτεσιανού ολοκληρώματος  $\iint_R f(x, y) dx dy$  σε πολικό ολοκλήρωμα περιλαμβάνει δύο βήματα.

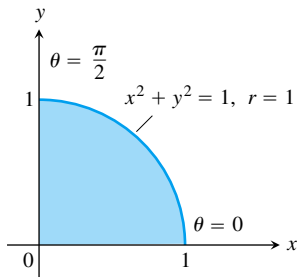
Βήμα 1: Αντικαθιστούμε  $x = r \cos \theta$  και  $y = r \sin \theta$ , και θέτουμε όπου  $dx dy$  το  $r dr d\theta$ .

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα πολικά όρια ολοκλήρωσης που ορίζουν τη συνολική καμπύλη του χωρίου ολοκλήρωσης  $R$ .

Το καρτεσιανό ολοκλήρωμα παίρνει τότε τη μορφή

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta, \quad (4)$$

όπου  $G$  είναι το χωρίο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες. Η διαδικασία αυτή μοιάζει με τη μέθοδο αντικατάστασης του Κεφαλαίου 4, μόνο που τώρα έχουμε δύο μεταβλητές προς αντικατάσταση αντί για μία. Σημειώστε ότι το γινόμενο  $dx dy$  δεν αντικαθίσταται από το  $dr d\theta$ , αλλά από το  $r dr d\theta$ .



**ΣΧΗΜΑ 12.29** Σε πολικές συντεταγμένες, το χωρίο αυτό περιγράφεται από απλές ανισότητες:

$$0 \leq r \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

(Παράδειγμα 3)

### Παράδειγμα 3 Μετατροπή καρτεσιανών ολοκληρωμάτων σε πολικά ολοκληρώματα

Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς την αρχή των αξόνων, μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας  $\delta(x, y) = 1$  η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο  $x^2 + y^2 = 1$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

**Λύση** Σχεδιάζουμε την πλάκα για να προσδιορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης (Σχήμα 12.29).

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η ροπή αδρανείας είναι η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $y$ , παίρνουμε

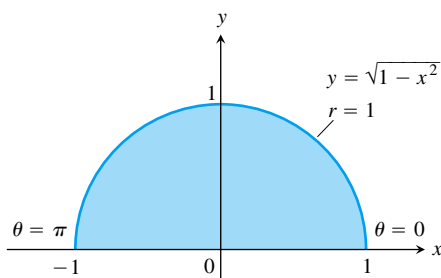
$$\int_0^1 \left( x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx,$$

για τον υπολογισμό του οποίου θα δυσκολευτούμε αρκετά αν δεν έχουμε πρόσβαση σε πίνακες ολοκληρωμάτων.

Τα πράγματα μπορούν να βελτιωθούν κάπως αν εκφράσουμε το αρχικό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες. Αντικαθιστώντας  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  και θέτοντας όπου  $dx dy$  το  $r dr d\theta$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Για ποιον λόγο αποβαίνει τόσο πρόσφορη η αλλαγή μεταβλητών εδώ; Ένας λόγος είναι ότι το  $x^2 + y^2$  γράφεται ως  $r^2$ . Ένας άλλος λόγος είναι ότι τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται σταθεροί αριθμοί.



**ΣΧΗΜΑ 12.30** Το ημικυκλικό χωρίο του Παραδείγματος 4 ορίζεται από τις σχέσεις

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

### Παράδειγμα 4 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε πολικές συντεταγμένες

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx,$$

όπου  $R$  είναι το ημικυκλικό χωρίο που φράσσεται από τον άξονα  $x$  και από την καμπύλη  $y = \sqrt{1-x^2}$  (Σχήμα 12.30).

**Λύση** Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, πρόκειται για ένα μη στοιχειώδες ολοκλήρωμα μια και δεν υπάρχει άμεσος τρόπος να ολοκληρώσουμε την ποσότητα  $e^{x^2+y^2}$  ως προς το  $x$  ή το  $y$ . Ωστόσο, το ολοκλήρωμα αυτό έχει μεγάλη σημασία για τα μαθηματικά —εμφανίζεται στη στατιστική, για παράδειγμα— και χρειαζόμαστε έναν τρόπο υπολογισμού του. Οι πολικές συντεταγμένες λύνουν το πρόβλημα. Αντικαθιστώντας  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  και θέτοντας όπου  $dy dx$  το  $r dr d\theta$ , είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\begin{aligned}\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (e - 1) d\theta = \frac{\pi}{2} (e - 1).\end{aligned}$$

Εξαιτίας του παράγοντα  $r$  στο γινόμενο  $r dr d\theta$  μπορέσαμε να ολοκληρώσουμε την ποσότητα  $e^{r^2}$ . Χωρίς τον παράγοντα αυτόν, δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε τίποτα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.3

### Υπολογισμός πολικών ολοκληρωμάτων

Στις Ασκήσεις 1-16, μετατρέψτε το καρτεσιανό ολοκλήρωμα σε ένα ισοδύναμο του πολικό ολοκλήρωμα. Στη συνέχεια υπολογίστε το πολικό ολοκλήρωμα.

- $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$
- $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$
- $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$
- $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dy dx$
- $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$
- $\int_0^6 \int_0^y x dx dy$
- $\int_0^2 \int_0^x y dy dx$
- $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$
- $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} dx dy$
- $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$
- $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2 + y^2)} dy dx$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2 + y^2} dy dx$
- $\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy$
- $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy$
- $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy dx$

### Εύρεση εμβαδού σε πολικές συντεταγμένες

- Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτεται από το πρώτο τεταρτημόριο η καμπύλη  $r = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ .
- Καρδιοειδής που αλληλεπικαλύπτεται με κύκλο** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που κείται εντός της καρδιοειδούς  $r = 1 + \cos \theta$  και εκτός του κύκλου  $r = 1$ .
- Φύλλο τριαντάφυλλου** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από ένα «φύλλο» του «τριαντάφυλλου»  $r = 12 \cos 3\theta$ .
- Κέλυφος** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον θετικό ημιάξονα  $x$  και από τη σπειροειδή καμπύλη  $r = 4\theta/3$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Το σχήμα του χωρίου μοιάζει με κέλυφος σαλιγκαριού.
- Καρδιοειδής στο πρώτο τεταρτημόριο** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτεται από το πρώτο τεταρτημόριο η καρδιοειδής καμπύλη  $r = 1 + \sin \theta$ .
- Αλληλεπικαλυπτόμενες καρδιοειδείς** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποτελεί τομή των καρδιοειδών  $r = 1 + \cos \theta$  και  $r = 1 - \cos \theta$ .

### Μάζες και ροπές

- Πρώτη ροπή πλάκας** Βρείτε την πρώτη ροπή ως προς τον άξονα  $x$  μιας λεπτής πλάκας σταθερής πυκνότητας  $\delta(x, y) = 3$ , που είναι κάτω φραγμένη από τον άξονα  $x$  και άνω φραγμένη από την καρδιοειδή  $r = 1 - \cos \theta$ .
- Ροπή αδρανείας δίσκου** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$ , καθώς και ως προς την αρχή, ενός λεπτού δίσκου που φράσσεται από τον κύκλο  $x^2 + y^2 = a^2$  και έχει πυκνότητα στο σημείο  $(x, y)$  ίση με  $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ , όπου  $k$  σταθερά.
- Μάζα πλάκας** Βρείτε τη μάζα μιας λεπτής πλάκας που καλύπτει την περιοχή εκτός του κύκλου  $r = 3$  και εντός του κύκλου  $r = 6 \sin \theta$ , δεδομένου ότι η συνάρτηση πυκνότητας της πλάκας είναι  $\delta(x, y) = 1/r$ .
- Ροπή αδρανείας πλάκας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς την αρχή μιας λεπτής πλάκας που καλύπτει την περιοχή εντός της καρδιοειδούς  $r = 1 - \cos \theta$  και εκτός του κύκλου  $r = 1$ , δεδομένου ότι η συνάρτηση πυκνότητας της πλάκας είναι  $\delta(x, y) = 1/r^2$ .
- Κεντροειδές καρδιοειδούς χωρίου** Βρείτε το κεντροειδές

της περιοχής που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη  $r = 1 + \cos \theta$ .

28. **Ροπή αδρανείας καρδιοειδούς χωρίου** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς την αρχή μιας λεπτής πλάκας που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη  $r = 1 + \cos \theta$ , δεδομένου ότι η συνάρτηση πυκνότητας της πλάκας είναι  $\delta(x, y) = 1$ .

### Μέσες τιμές

29. **Μέσο ύψος ημισφαιρίου** Βρείτε το μέσο ύψος του ημισφαιρίου  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  που κείται πάνω από τον κυκλικό δίσκο  $x^2 + y^2 \leq a^2$  στο επίπεδο  $xy$ .
30. **Μέσο ύψος κώνου** Βρείτε το μέσο ύψος του (απλού) κώνου  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  που κείται πάνω από τον κυκλικό δίσκο  $x^2 + y^2 \leq a^2$  στο επίπεδο  $xy$ .
31. **Μέση απόσταση από το εσωτερικό κυκλικού δίσκου στο κέντρο του δίσκου** Βρείτε τη μέση απόσταση ενός σημείου  $P(x, y)$  του κυκλικού δίσκου  $x^2 + y^2 \leq a^2$  από την αρχή.
32. **Μέσο τετράγωνο της απόστασης σημείου στο εσωτερικό κυκλικού δίσκου από σημείο στην περιφέρειά του.** Βρείτε τη μέση τιμή του τετραγώνου της απόστασης ενός σημείου  $P(x, y)$  του κυκλικού δίσκου  $x^2 + y^2 \leq 1$  από το συνοριακό σημείο  $A(1, 0)$ .

### Θεωρία και παραδείγματα

33. **Μετατροπή σε πολικό ολοκλήρωμα** Ολοκληρώστε την  $f(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]/\sqrt{x^2 + y^2}$  στο χωρίο  $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$ .
34. **Μετατροπή σε πολικό ολοκλήρωμα** Ολοκληρώστε την  $f(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$  στο χωρίο  $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$ .
35. **Όγκος ορθού μη κυκλικού κυλίνδρου** Το χωρίο που κείται εντός της καρδιοειδούς καμπύλης  $r = 1 + \cos \theta$  και εκτός του κύκλου  $r = 1$  είναι η βάση ενός στερεού ορθού κυλίνδρου. Η άνω πλευρά του κυλίνδρου κείται στο επίπεδο  $z = x$ . Βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου.
36. **Όγκος ορθού μη κυκλικού κυλίνδρου** Το χωρίο που περικλείεται από τον λημνίσκο  $r^2 = 2 \cos 2\theta$  είναι η βάση ενός στερεού ορθού κυλίνδρου του οποίου η άνω πλευρά φράσσεται από τη σφαίρα  $z = \sqrt{2 - r^2}$ . Βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου.
37. **Μετατροπή σε πολικά ολοκληρώματα**

- (α) Ο συνήθης τρόπος υπολογισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  είναι να υπολογίσουμε πρώτα το τετράγωνό του:

$$I^2 = \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Υπολογίστε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνοντας χρήση πολικών συντεταγμένων και κατόπιν λύστε ως προς  $I$  την εξίσωση που προκύπτει.

- (β) Υπολογίστε το

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt.$$

38. **Μετατροπή σε πολικό ολοκλήρωμα** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy.$$

39. **Μάθετε γράφοντας** Ολοκληρώστε τη συνάρτηση  $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$  στο χωρίο του κυκλικού δίσκου  $x^2 + y^2 \leq 3/4$ . Υπάρχει το ολοκλήρωμα της  $f(x, y)$  στο χωρίο του κυκλικού δίσκου  $x^2 + y^2 \leq 1$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

40. **Τύπος εμβαδού σε πολικές συντεταγμένες** Κάνοντας χρήση του κατάλληλου διπλού ολοκληρώματος σε πολικές συντεταγμένες, δείξτε ότι

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

είναι το εμβαδόν της περιοχής σχήματος βεντάλιας που κείται μεταξύ της αρχής και της καμπύλης  $r = f(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ .

41. **Μέση απόσταση από δεδομένο σημείο στο εσωτερικό κυκλικού δίσκου** Έστω  $P_0$  σημείο εντός κύκλου ακτίνας  $a$  και έστω  $h$  η απόσταση από το  $P_0$  μέχρι το κέντρο του κύκλου. Έστω  $d$  η απόσταση από ένα τυχόν σημείο  $P$  έως το  $P_0$ . Βρείτε τη μέση τιμή του  $d^2$  στην περιοχή που περικλείεται από τον κύκλο. (Υπόδειξη: Για λόγους απλότητας, τοποθετήστε το κέντρο του κύκλου στην αρχή των αξόνων και το  $P_0$  στον άξονα  $x$ .)

42. **Εμβαδόν** Έστω ότι το εμβαδόν ενός χωρίου στο πολικό επίπεδο είναι

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc \theta}^{2 \sin \theta} r dr d\theta.$$

Σχεδιάστε το χωρίο αυτό και βρείτε το εμβαδόν του.

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

#### Μετατροπές συντεταγμένων

Στις Ασκήσεις 43-46, χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να μετατρέψετε κάθε καρτεσιανό ολοκλήρωμα σε ένα ισοδύναμο πολικό ολοκλήρωμα το οποίο και υπολογίστε. Εκτελέστε τα εξής βήματα σε κάθε άσκηση.

- (α) Σχεδιάστε το καρτεσιανό χωρίο ολοκλήρωσης στο επίπεδο  $xy$ .
- (β) Εκφράστε κάθε συνοριακή καμπύλη του καρτεσιανού χωρίου του ερωτήματος (α) στην πολική της αναπαράσταση λύνοντας την καρτεσιανή της εξίσωση ως προς  $r$  και  $\theta$ .
- (γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β), σχεδιάστε την πολική περιοχή ολοκλήρωσης στο επίπεδο  $r\theta$ .
- (δ) Μετατρέψτε την ολοκληρωτέα ποσότητα από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες. Προσδιορίστε τα όρια ολοκλήρωσης από το σχήμα που φτιάξατε στο ερώτημα (γ) και υπολογίστε το πολικό ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας.

43.  $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx$

44.  $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy dx$

45.  $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$

46.  $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y} dx dy$

## 12.4

## Τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

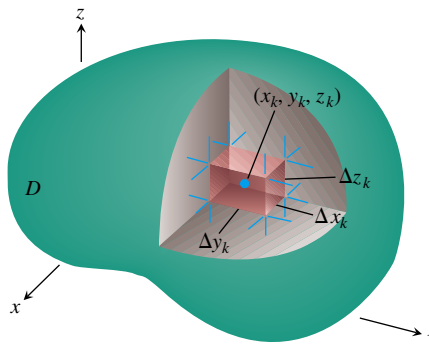
- Τριπλά ολοκληρώματα • Ιδιότητες τριπλών ολοκληρωμάτων
- Όγκος χωρίου του χώρου • Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης
  - Μέση τιμή συναρτήσεως στον χώρο

Τα τριπλά ολοκληρώματα μας χρησιμεύουν στον υπολογισμό όγκων τριδιάστατων σχημάτων, μαζών και ροπών στερεών σωμάτων, και μέσων τιμών συναρτήσεων τριών μεταβλητών. Στο Κεφάλαιο 13 θα δούμε με ποιον τρόπο προκύπτουν τέτοια ολοκληρώματα στη μελέτη διανυσματικών πεδίων και ροής ρευστών.

## Τριπλά ολοκληρώματα

Αν η  $F(x, y, z)$  είναι συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό φραγμένο χωρίο  $D$  του χώρου —το χωρίο που καλύπτεται από μια στερεά σφαίρα, για παράδειγμα, ή από έναν βόλο από τσιμέντο— τότε το ολοκλήρωμα της  $F$  στο  $D$  μπορεί να οριστεί ως ακολούθως. Διαμερίζουμε ένα ορθογώνιο χωρίο που περιέχει το  $D$  σε ορθογώνιες κυψέλες, φέροντας επίπεδα παράλληλα στα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων (Σχήμα 12.31). Αριθμούμε τις κυψέλες στο εσωτερικό του  $D$  από 1 έως  $n$  με όποια σειρά θέλουμε. Μια τυπική κυψέλη έχει διαστάσεις  $\Delta x_k$  επί  $\Delta y_k$  επί  $\Delta z_k$  και όγκο  $\Delta V_k$ . Επιλέγουμε ένα σημείο  $(x_k, y_k, z_k)$  σε κάθε κυψέλη και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k. \quad (1)$$



**ΣΧΗΜΑ 12.31** Διαμέριση του στερεού σε ορθογώνιες κυψέλες όγκου  $\Delta V_k$ .

Αν η  $F$  είναι συνεχής, και η συνοριακή επιφάνεια του  $D$  αποτελείται από λείες επιφάνειες που συνδέονται μεταξύ τους μέσω συνεχών καμπυλών, τότε καθώς τα  $\Delta x_k$ ,  $\Delta y_k$ , και  $\Delta z_k$  τείνουν στο μηδέν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, τα αθροίσματα  $S_n$  τείνουν στο όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z) dV. \quad (2)$$

Καλούμε το όριο αυτό **τριπλό ολοκλήρωμα της  $F$  στο  $D$** . Το όριο υπάρχει επίσης για κάποιες ασυνεχείς συναρτήσεις.

## Ιδιότητες τριπλών ολοκληρωμάτων

Τα τριπλά ολοκληρώματα έχουν τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες με τα διπλά και τα απλά ολοκληρώματα.



## CD-ROM

## Δικτυότοπος

## Βιογραφικά στοιχεία

Max Planck  
(1858-1947)

## Ιδιότητες τριπλών ολοκληρωμάτων

Αν οι  $F = F(x, y, z)$  και  $G = G(x, y, z)$  είναι συνεχείς, τότε

1. Σταθερό πολλαπλάσιο:  $\iiint_D kF \, dV = k \iiint_D F \, dV$  για κάθε  $k$

2. Άθροισμα και διαφορά:  $\iiint_D (F \pm G) \, dV = \iiint_D F \, dV \pm \iiint_D G \, dV$

3. Ανισότητες:

(α)  $\iiint_D F \, dV \geq 0$  εφόσον  $F \geq 0$  στο  $D$

(β)  $\iiint_D F \, dV \geq \iiint_D G \, dV$  εφόσον  $F \geq G$  στο  $D$

4.

$$\iiint_D F \, dV = \iiint_{D_1} F \, dV + \iiint_{D_2} F \, dV + \cdots + \iiint_{D_n} F \, dV$$

όπου  $D$  είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους μη αλληλεπικαλυπτόμενων κυψελών.

## Όγκος χωρίου του χώρου

Αν η  $F$  είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή 1, τότε τα αθροίσματα στην Εξίσωση (1) γράφονται στη μορφή

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \sum 1 \cdot \Delta V_k = \sum \Delta V_k.$$

Καθώς τα  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , και  $\Delta z$  τείνουν στο μηδέν, οι κυψέλες  $\Delta V_k$  πολλαπλασιάζονται και μικραίνουν σε μέγεθος, καλύπτοντας ολοένα και πληρέστερα το χωρίο  $D$ . Έτσι, ορίζουμε ως όγκο του χωρίου  $D$  το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \iiint_D dV.$$

## Ορισμός Όγκος

Ο όγκος ενός κλειστού, φραγμένου χωρίου  $D$  στον χώρο είναι

$$V = \iiint_D dV. \quad (3)$$

Όπως θα δούμε σε λίγο, το ολοκλήρωμα αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τους όγκους των στερεών που περικλείονται από καμπύλες επιφάνειες.

## Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης

Τα τριπλά ολοκληρώματα υπολογίζονται με εφαρμογή μιας τριδιάστατης εκδοχής του θεωρήματος του Fubini (Ενότητα 12.1), δηλαδή με τη

διαδοχική εκτέλεση τριών απλών (δηλ. ως προς μία μεταβλητή) ολοκληρώσεων. Τα όρια ολοκλήρωσης καθενός από αυτά τα τρία απλά ολοκληρώματα βρίσκονται μέσω μιας γεωμετρικής διαδικασίας παρόμοιας με αυτήν που εφαρμόσαμε για διπλά ολοκληρώματα.

### Πώς Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης σε τριπλά ολοκληρώματα

Για να υπολογίσουμε το

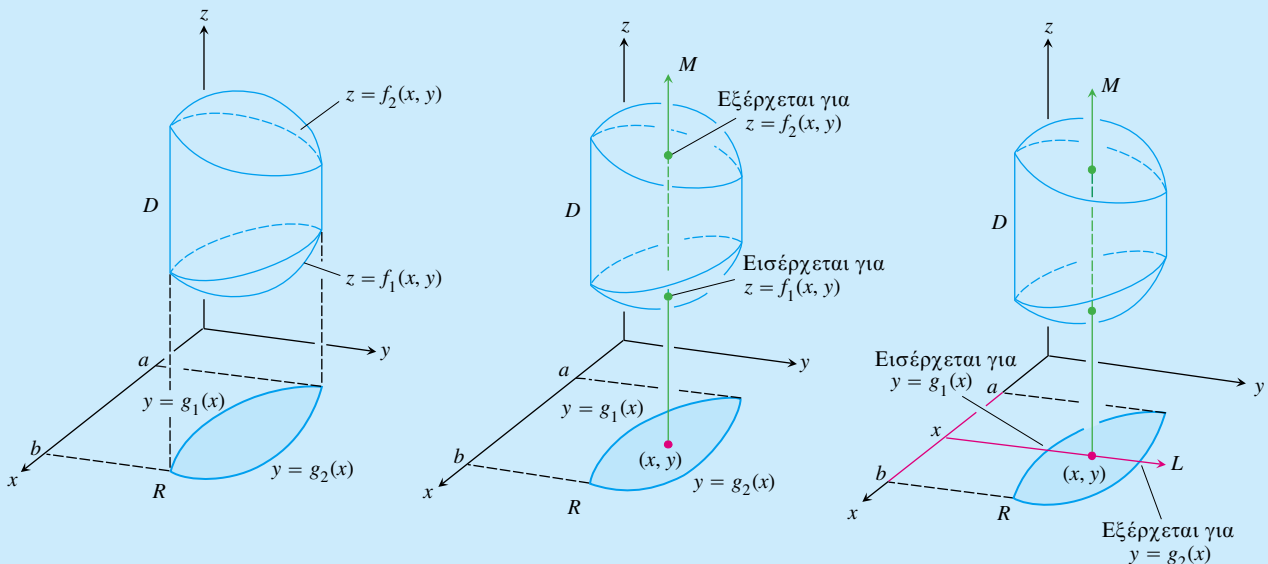
$$\iiint_D F(x, y, z) dV$$

σε ένα χωρίο  $D$ , όπου ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς  $z$ , έπειτα ως προς  $y$ , και τελικά ως προς  $x$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα.

**Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα.** Σχεδιάζουμε το χωρίο  $D$  καθώς και τη «σκιά» του  $R$  (κατακόρυφη προβολή) στο επίπεδο  $xy$ . Σημειώνουμε στο σχεδιάγραμμα τις συνοριακές επιφάνειες του  $D$ , καθώς και τις συνοριακές καμπύλες του  $R$ .

**Βήμα 2: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .** Φέρουμε μια ευθεία  $M$  που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο  $(x, y)$  του χωρίου  $R$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ . Καθώς το  $z$  αυξάνεται, η  $M$  εισέρχεται στο  $D$  για  $z = f_1(x, y)$  και εξέρχεται για  $z = f_2(x, y)$ . Οι τιμές αυτές είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .

**Βήμα 3: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $y$ .** Φέρουμε μια ευθεία  $L$  που διέρχεται από το  $(x, y)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y$ . Καθώς το  $y$  αυξάνεται, η  $L$  εισέρχεται στο χωρίο  $R$  για  $y = g_1(x)$  και εξέρχεται για  $y = g_2(x)$ . Οι τιμές αυτές είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $y$ .



**Βήμα 4: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $x$ .** Επιλέγουμε τιμές του  $x$  που περιέχουν όλες τις ευθείες οι οποίες διέρχονται από το χωρίο  $R$  και είναι παράλληλες στον άξονα  $y$  ( $x = a$  και  $x = b$  στο παραπάνω σχήμα). Οι τιμές αυτές είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $x$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx.$$

Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε και όταν αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Η «σκιά» του χωρίου  $D$  ανήκει στο επίπεδο που σχηματίζουν οι άξονες των τελευταίων δύο μεταβλητών της ολοκλήρωσης.

**Παράδειγμα 1** Εύρεση όγκου

Βρείτε τον όγκο του χωρίου  $D$  που περικλείεται από τις επιφάνειες  $z = x^2 + 3y^2$  και  $z = 8 - x^2 - y^2$ .

**Λύση** Ο όγκος ισούται με

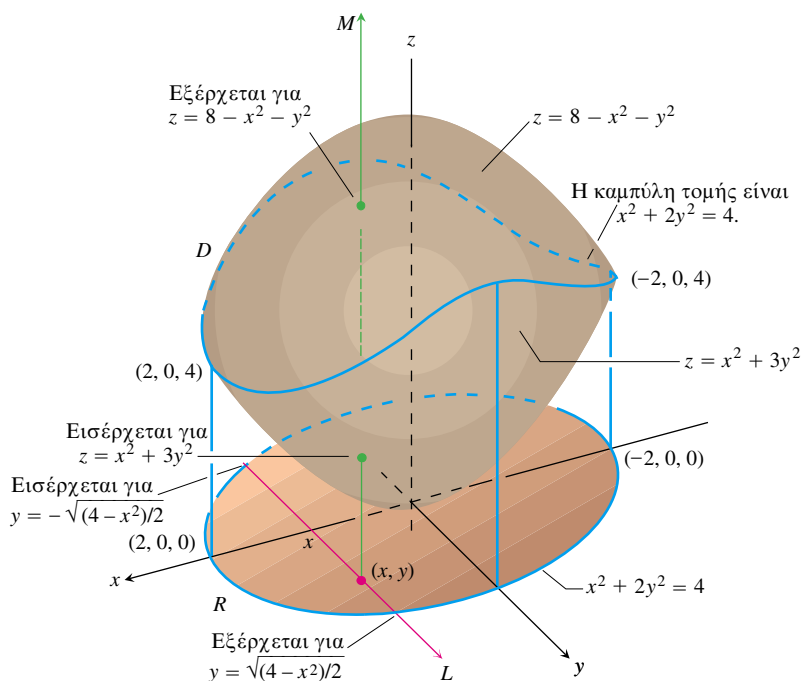
$$V = \iiint_D dz \, dy \, dx,$$

δηλαδή με το ολοκλήρωμα της  $F(x, y, z) = 1$  στο  $D$ . Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης ακολουθώντας την εξής διαδικασία.

**Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα.** Οι δύο επιφάνειες (Σχήμα 12.32) τέμνονται πάνω στον ελλειπτικό κύλινδρο  $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$  δηλ.  $x^2 + 2y^2 = 4$ . Το σύνορο του χωρίου  $R$ , δηλ. της προβολής του  $D$  στο επίπεδο  $xy$ , είναι μια έλλειψη με ίδια εξίσωση:  $x^2 + 2y^2 = 4$ . Το «άνω» σύνορο του  $R$  είναι η καμπύλη  $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ . Το κάτω σύνορο είναι η καμπύλη  $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ .

**Βήμα 2: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .** Η ευθεία  $M$  που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο  $(x, y)$  του χωρίου  $R$  παράλληλα στον άξονα  $z$ , εισέρχεται στο χωρίο  $D$  για  $z = x^2 + 3y^2$  και εξέρχεται για  $z = 8 - x^2 - y^2$ .

**Βήμα 3: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $y$ .** Η ευθεία  $L$  που διέρχεται από το  $(x, y)$  παράλληλα στον άξονα  $y$  εισέρχεται στο χωρίο  $R$  για  $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$  και εξέρχεται για  $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ .



**ΣΧΗΜΑ 12.32** Ο όγκος του χωρίου που περικλείεται από τα δύο αυτά παραβολοειδή υπολογίζεται στο Παράδειγμα 1.

**Βήμα 4: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $x$ .** Καθώς η ευθεία  $L$  σαρώνει το χωρίο  $R$ , η τιμή του  $x$  μεταβάλλεται από  $x = -2$  στο σημείο  $(-2, 0, 0)$  έως  $x = 2$  στο  $(2, 0, 0)$ . Ο όγκος του χωρίου  $D$  είναι

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[ (8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left( 2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} \right) dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[ 8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} \right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx \\
 &= 8\pi\sqrt{2} \text{ κυβικές μονάδες.} \quad \text{Η ολοκλήρωση έγινε με την αντικατάσταση } x = 2 \sin u
 \end{aligned}$$

Στο επόμενο παράδειγμα, προβάλλουμε το χωρίο  $D$  στο επίπεδο  $xz$  αντί για το επίπεδο  $xy$ , οπότε προκύπτει διαφορετική σειρά ολοκλήρωσης.

### Παράδειγμα 2 Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης με σειρά $dy \, dz \, dx$

Προσδιορίστε τα όρια ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος της συνάρτησης  $F(x, y, z)$  στο τετράεδρο  $D$  με κορυφές  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ , και  $(0, 1, 1)$ .

#### Λύση

Βήμα 1: *Σχεδιάγραμμα.* Σχεδιάζουμε το χωρίο  $D$  καθώς και τη «σκιά» του  $R$  στο επίπεδο  $xz$  (Σχήμα 12.33). Η άνω (δεξιά) συνοριακή επιφάνεια του  $D$  ανήκει στο επίπεδο  $y = 1$ . Η κάτω (αριστερά) ανήκει στο επίπεδο  $y = x + z$ . Η άνω συνοριακή καμπύλη του  $R$  είναι η ευθεία  $z = 1 - x$ . Η κάτω συνοριακή καμπύλη είναι η ευθεία  $z = 0$ .

Βήμα 2: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $y$ .* Η ευθεία που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο  $(x, z)$  του χωρίου  $R$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y$  εισέρχεται στο χωρίο  $D$  για  $y = x + z$  και εξέρχεται για  $y = 1$ .

Βήμα 3: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .* Η ευθεία  $L$  που διέρχεται από το  $(x, z)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ , εισέρχεται στο  $R$  για  $z = 0$  και εξέρχεται για  $z = 1 - x$ .

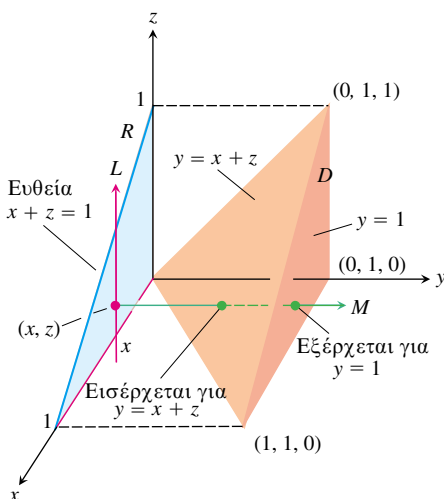
Βήμα 4: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $x$ .* Καθώς η ευθεία  $L$  σαρώνει το χωρίο  $R$ , η τιμή του  $x$  μεταβάλλεται από  $x = 0$  έως  $x = 1$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x, y, z) \, dy \, dz \, dx.$$

### Παράδειγμα 3 Επανερχόμαστε στο Παράδειγμα 2 χρησιμοποιώντας τη σειρά ολοκλήρωσης $dz \, dy \, dx$

Για να ολοκληρώσουμε την  $F(x, y, z)$  στο τετράεδρο  $D$  με τη σειρά  $dz \, dy \, dx$ , εκτελούμε τα βήματα 2 έως 4 ως εξής.

Βήμα 2: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .* Μια παράλληλη στον άξονα  $z$



**ΣΧΗΜΑ 12.33** Το τετράεδρο του Παραδείγματος 2.

ευθεία που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο  $(x, y)$  της «σκιάς» του  $D$  στο επίπεδο  $xy$  εισέρχεται στο τετράεδρο για  $z = 0$  και εξέρχεται διά της επιφάνειας  $z = y - x$  (Σχήμα 12.33).

Βήμα 3: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $y$ . Μια ευθεία που διέρχεται από το  $(x, y)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y$  εισέρχεται στη «σκιά» του  $D$  στο επίπεδο  $xy$  για  $y = x$  και εξέρχεται για  $y = 1$ .

Βήμα 4: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $x$ . Καθώς η παράλληλη στον άξονα  $y$  ευθεία του βήματος 3 σαρώνει τη «σκιά» του τετραέδρου, η τιμή του  $x$  μεταβάλλεται από  $x = 0$  έως  $x = 1$  καταλήγοντας στο σημείο  $(1, 1, 0)$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x, y, z) dz dy dx.$$

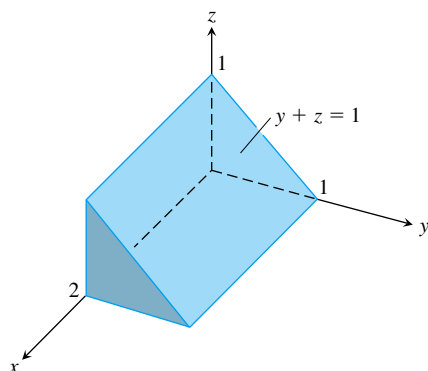
Για παράδειγμα, αν  $F(x, y, z) = 1$ , τότε ο όγκος του τετραέδρου θα ισούται με

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 - xy \right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \text{ κυβικής μονάδας.} \end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν υπολογίζαμε το

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 dy dz dx$$

από το Παράδειγμα 2. Δοκιμάστε το!



**ΣΧΗΜΑ 12.34** Το Παράδειγμα 4 δείχνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τον όγκο του πρίσματος αυτού με έξι διαφορετικά τριπλά ολοκληρώματα.

Όπως έχουμε δει, ενδέχεται να υπάρχουν δύο διαφορετικές σειρές ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος. Για τριπλά ολοκληρώματα, ενδέχεται να υπάρχουν μέχρι και έξι διαφορετικές σειρές ολοκλήρωσης.

#### Παράδειγμα 4 Διαφορετικές σειρές ολοκλήρωσης

Καθένα από τα ακόλουθα ολοκληρώματα δίνει τον όγκο του στερεού του Σχήματος 12.34.

(α)  $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx dy dz$

(β)  $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx dz dy$

(γ)  $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy dx dz$

(δ)  $\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy dz dx$

$$(ε) \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz \, dx \, dy$$

$$(στ) \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz \, dy \, dx$$

Ας υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα (β) και (γ):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx \, dz \, dy && \text{Το ολοκλήρωμα (β)} \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2 \, dz \, dy \\ &= \int_0^1 [2z]_{z=0}^{z=1-y} dy \\ &= \int_0^1 2(1-y) \, dy \\ &= 1 \text{ κυβική μονάδα.} \end{aligned}$$

Επίσης,

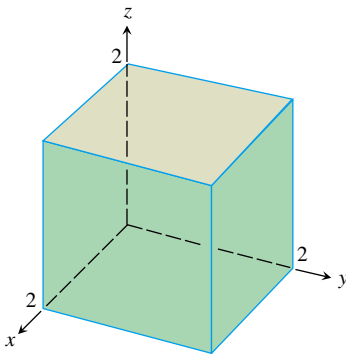
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy \, dx \, dz && \text{Το ολοκλήρωμα (γ)} \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (1-z) \, dx \, dz \\ &= \int_0^1 [x - zx]_{x=0}^{x=2} dz \\ &= \int_0^1 (2 - 2z) \, dz \\ &= 1 \text{ κυβική μονάδα.} \end{aligned}$$

### Μέση τιμή συναρτήσεως στον χώρο

Η μέση τιμή μιας συναρτήσεως  $F$  σε ένα χωρίο  $D$  του χώρου ορίζεται από τον τύπο

$$\text{Μέση τιμή της } F \text{ στο } D = \frac{1}{\text{όγκος } D} \iiint_D F \, dV. \quad (4)$$

Για παράδειγμα, αν  $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , τότε η μέση τιμή της  $F$  στο χωρίο  $D$  είναι η μέση απόσταση σημείων του  $D$  από την αρχή. Αν  $F(x, y, z)$  είναι η πυκνότητα στερεού που καταλαμβάνει χωρίο  $D$  του χώρου, τότε η μέση τιμή της  $F$  στο  $D$  είναι η μέση πυκνότητα του στερεού σε μονάδες μάζας ανά μονάδα όγκου.



**ΣΧΗΜΑ 12.35** Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 5.

### Παράδειγμα 5 Εύρεση μέσης τιμής

Βρείτε τη μέση τιμή της  $F(x, y, z) = xyz$  στο κυβικό χωρίο που ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, καθώς και από τα επίπεδα  $x=2$ ,  $y=2$ , και  $z=2$ .

**Λύση** Σχεδιάζουμε το κυβικό χωρίο με ικανή λεπτομέρεια, ώστε να δείξουμε τα όρια ολοκλήρωσης (Σχήμα 12.35). Κατόπιν χρησιμοποιούμε την Εξίσωση (4) για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της  $F$  στο κυβικό χωρίο.

Ο όγκος του κύβου είναι  $(2)(2)(2) = 8$ . Το ολοκλήρωμα της  $F$  στον κύβο αυτόν ισούται με



$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^2 \left[ \frac{x^2}{2} yz \right]_{x=0}^{x=2} dy \, dz = \int_0^2 \int_0^2 2yz \, dy \, dz \\ &= \int_0^2 \left[ y^2 z \right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^2 4z \, dz = \left[ 2z^2 \right]_0^2 = 8.\end{aligned}$$

Για τις τιμές αυτές, η Εξίσωση (4) μας δίνει

$$\text{Μέση τιμή του } xyz \text{ στον κύβο} = \frac{1}{\text{όγκος κύβος}} \cdot \iiint_{\text{κύβος}} xyz \, dV = \left( \frac{1}{8} \right) (8) = 1.$$

Κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, ολοκληρώσαμε με σειρά  $dx \, dy \, dz$ , αλλά οποιαδήποτε άλλη σειρά ολοκλήρωσης θα έδινε προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.4

### Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων

- Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του Παραδείγματος 2 για  $F(x, y, z) = 1$  προκειμένου να βρείτε τον όγκο του τετραέδρου.
- Όγκος ορθογώνιου στερεού** Γράψτε έξι διαφορετικά τριπλά ολοκληρώματα που να εκφράζουν τον όγκο του ορθογώνιου στερεού που ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, καθώς και από τα επίπεδα  $x = 1$ ,  $y = 2$ , και  $z = 3$ . Υπολογίστε ένα από τα ολοκληρώματα αυτά.
- Όγκος τετραέδρου** Γράψτε έξι διαφορετικά τριπλά ολοκληρώματα που να εκφράζουν τον όγκο του τετραέδρου που αποκόπτεται από το πρώτο οκταμόριο το επίπεδο  $6x + 3y + 2z = 6$ . Υπολογίστε ένα από τα ολοκληρώματα αυτά.
- Όγκος στερεού** Γράψτε έξι διαφορετικά τριπλά ολοκληρώματα που να εκφράζουν τον όγκο του χωρίου που ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και περικλείεται από τον κύλινδρο  $x^2 + z^2 = 4$  και από το επίπεδο  $y = 3$ . Υπολογίστε ένα από τα ολοκληρώματα αυτά.
- Όγκος περιεχόμενος σε παραβολοειδή** Έστω  $D$  το χωρίο που φράσσεται από τα παραβολοειδή  $z = 8 - x^2 - y^2$  και  $z = x^2 + y^2$ . Γράψτε έξι διαφορετικά τριπλά ολοκληρώματα που να εκφράζουν τον όγκο του χωρίου  $D$ . Υπολογίστε ένα από τα ολοκληρώματα αυτά.
- Όγκος εσωτερικού παραβολοειδούς κάτω από επίπεδο** Έστω  $D$  το χωρίο που φράσσεται από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$  και από το επίπεδο  $z = 2y$ . Γράψτε τριπλά ολοκληρώματα της μορφής  $dz \, dx \, dy$  και  $dz \, dy \, dx$  που να εκφράζουν τον όγκο του χωρίου  $D$ . Μην υπολογίσετε κανένα από τα ολοκληρώματα αυτά.

- $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \, dx \, dy$
- $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} \, dx \, dy \, dz$
- $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx$
- $\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi y \sin z \, dx \, dy \, dz$
- $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x + y + z) \, dy \, dx \, dz$
- $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz \, dx \, dy$
- $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz \, dy \, dx$
- $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u + v + w) \, du \, dv \, dw$  (χώρος  $uvw$ )
- $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t \, dt \, dr \, ds$  (χώρος  $rst$ )
- $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln \sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x \, dx \, dt \, dv$  (χώρος  $tvx$ )
- $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1} \, dp \, dq \, dr$  (χώρος  $pqr$ )

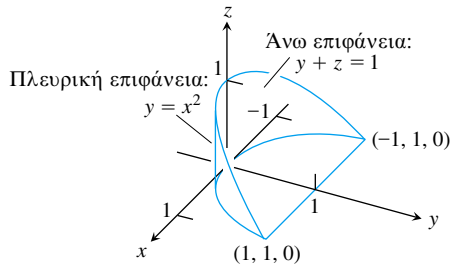
### Υπολογισμός όγκων μέσω τριπλών ολοκληρωμάτων

- Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το χωρίο ολοκλήρωσης του

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz \, dy \, dx.$$

### Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 7-20.

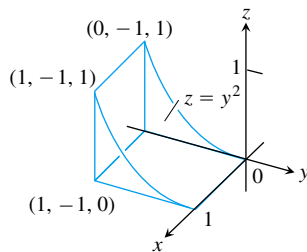


Ξαναγράψτε το ολοκλήρωμα σε ισοδύναμη μορφή χρησιμοποιώντας τη σειρά ολοκλήρωσης

- (α)  $dy dz dx$                       (β)  $dy dx dz$   
 (γ)  $dx dy dz$                       (δ)  $dx dz dy$   
 (ε)  $dz dx dy$ .

22. Στο σχήμα φαίνεται το χωρίο ολοκλήρωσης του

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz dy dx.$$

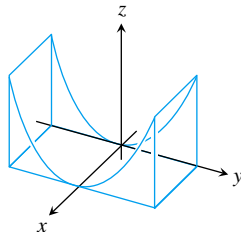


Ξαναγράψτε το ολοκλήρωμα σε ισοδύναμη μορφή χρησιμοποιώντας τη σειρά ολοκλήρωσης

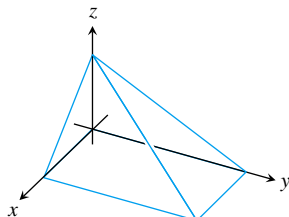
- (α)  $dy dz dx$                       (β)  $dy dx dz$   
 (γ)  $dx dy dz$                       (δ)  $dx dz dy$   
 (ε)  $dz dx dy$ .

Υπολογίστε τους όγκους των χωρίων των Ασκήσεων 23-36.

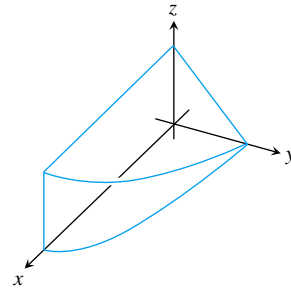
23. Το χωρίο κείται μεταξύ του κυλίνδρου  $z = y^2$  και του επιπέδου  $xy$ , και φράσσεται από τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $y = 1$



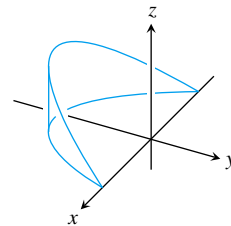
24. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, καθώς και από τα επίπεδα  $x + z = 1$ ,  $y + 2z = 2$ .



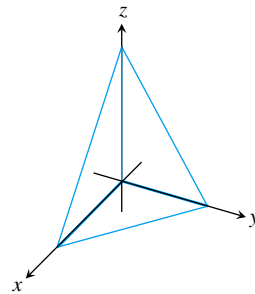
25. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, από το επίπεδο  $y + z = 2$ , και από τον κύλινδρο  $x = 4 - y^2$ .



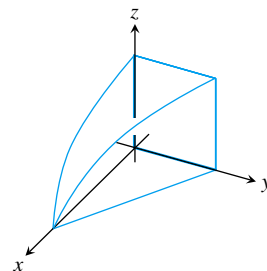
26. Το χωρίο σφηνοειδούς σχήματος που αποκόπτον από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$  τα επίπεδα  $z = -y$  και  $z = 0$ .



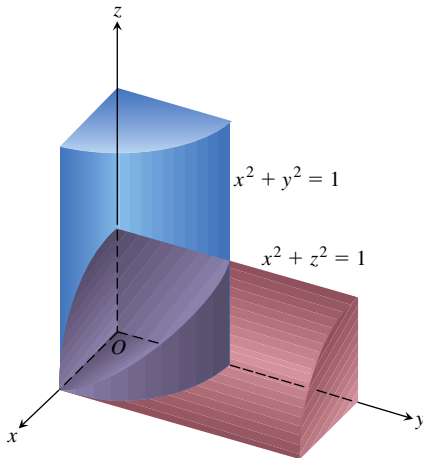
27. Το τετράεδρο που ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, καθώς και από το επίπεδο  $x + y/2 + z/3 = 1$ .



28. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, από το επίπεδο  $y = 1 - x$ , και από την επιφάνεια  $z = \cos(\pi x/2)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

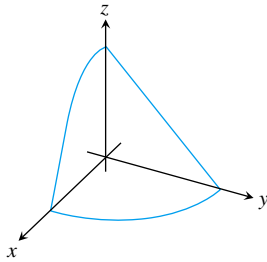


29. Η κοινή περιοχή του εσωτερικού των κυλίνδρων  $x^2 + y^2 = 1$  και  $x^2 + z^2 = 1$  (Σχήμα 12.36).

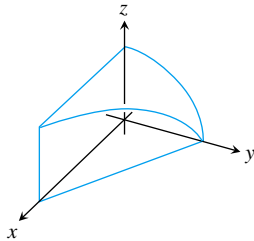


**ΣΧΗΜΑ 12.36** Φαίνεται το ένα όγδοο της κοινής περιοχής των κυλίνδρων  $x^2 + y^2 = 1$  και  $x^2 + z^2 = 1$  της Άσκησης 29.

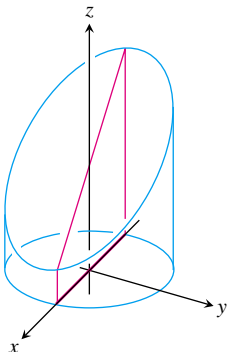
30. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, και από την επιφάνεια  $z = 4 - x^2 - y$ .



31. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, από το επίπεδο  $x + y = 4$ , και από τον κύλινδρο  $y^2 + 4z^2 = 16$ .



32. Το χωρίο που αποκόπτον από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$  τα επίπεδα  $z = 0$  και  $x + z = 3$ .



33. Το χωρίο μεταξύ των επιπέδων  $x + y + 2z = 2$  και  $2x + 2y + z = 4$  στο πρώτο οκταμόριο.
34. Το πεπερασμένο χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα  $z = x$ ,  $x + z = 8$ ,  $z = y$ ,  $y = 8$ , και  $z = 0$ .
35. Το χωρίο που αποκόπτον από τον στερεό ελλειπτικό κύλινδρο  $x^2 + 4y^2 \leq 4$  το επίπεδο  $xy$  και το επίπεδο  $z = x + 2$ .
36. Το χωρίο που φράσσεται από πίσω από το επίπεδο  $x = 0$ , από μπροστά και από πλάι από τον παραβολικό κύλινδρο  $x = 1 - y^2$ , από πάνω από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ , και από κάτω από το επίπεδο  $xy$ .

### Μέσες τιμές

Στις Ασκήσεις 37-40, βρείτε τη μέση τιμή της  $F(x, y, z)$  στο χωρίο που δίνεται.

37.  $F(x, y, z) = x^2 + 9$  στο κυβικό χωρίο του πρώτου οκταμορίου, το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, και από τα επίπεδα  $x = 2$ ,  $y = 2$ , και  $z = 2$ .
38.  $F(x, y, z) = x + y - z$  στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο χωρίο του πρώτου οκταμορίου, το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, και από τα επίπεδα  $x = 1$ ,  $y = 1$ , και  $z = 2$ .
39.  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  στο κυβικό χωρίο του πρώτου οκταμορίου, το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, και από τα επίπεδα  $x = 1$ ,  $y = 1$ , και  $z = 1$ .
40.  $F(x, y, z) = xyz$  στο κυβικό χωρίο του πρώτου οκταμορίου, το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, και από τα επίπεδα  $x = 2$ ,  $y = 2$ , και  $z = 2$ .

### Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 41-44 αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης με κατάλληλο τρόπο.

41.  $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz$
42.  $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xz e^{xy^2} dy dx dz$
43.  $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz$
44.  $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx$

### Θεωρία και παραδείγματα

45. **Εύρεση άνω ορίου ολοκλήρωσης** Λύστε ως προς το  $a$ :

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz dy dx = \frac{4}{15}.$$

46. **Ελλειψοειδές** Για ποια τιμή του  $c$  ισούται ο όγκος του ελλειψοειδούς  $x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$  με  $8\pi$ ;
47. **Μάθετε γράφοντας: Ελαχιστοποίηση τριπλού ολοκληρώματος** Για ποιο χωρίο  $D$  του χώρου ελαχιστοποιείται η τιμή του ολοκληρώματος

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4) dV;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

48. **Μάθετε γράφοντας:** *Μεγιστοποίηση τριπλού ολοκληρώματος*  
Για ποιο χωρίο  $D$  του χώρου μεγιστοποιείται η τιμή του ολοκληρώματος

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2) dV;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

### Αριθμητικοί υπολογισμοί

Στις Ασκήσεις 49-52, χρησιμοποιήστε ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να υπολογίσετε το τριπλό ολο-

κλήρωμα της δοθείσας συνάρτησης στο καθορισμένο χωρίο του χώρου.

49.  $F(x, y, z) = x^2 y^2 z$  στον στερεό κύλινδρο που φράσσεται από την επιφάνεια  $x^2 + y^2 = 1$  και από τα επίπεδα  $z = 0$  και  $z = 1$ .

50.  $F(x, y, z) = |xyz|$  στο στερεό που φράσσεται από κάτω από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ , και από πάνω από το επίπεδο  $z = 1$ .

51.  $F(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$  στο στερεό που φράσσεται από κάτω από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , και από πάνω από το επίπεδο  $z = 1$ .

52.  $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$  στη στερεά σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

## 12.5

### Μάζες και ροπές σε τρεις διαστάσεις

#### Μάζες και ροπές

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τρόπους υπολογισμού μάζας και ροπής τριδιάστατων αντικειμένων σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι τύποι μοιάζουν με τους αντίστοιχους τύπους για αντικείμενα σε δύο διαστάσεις. Για υπολογισμούς σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες, δείτε την Ενότητα 12.6.

#### Μάζες και ροπές

Αν  $\delta(x, y, z)$  είναι η πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα όγκου) σώματος που καταλαμβάνει κάποιο χωρίο  $D$  του χώρου, τότε το ολοκλήρωμα της  $\delta$  στο  $D$  δίνει τη μάζα του σώματος. Για να δούμε γιατί αληθεύει αυτό, θεωρούμε μια διαμέριση του σώματος σε  $n$  στοιχεία μάζας όπως αυτή του Σχήματος 12.37. Η μάζα του σώματος είναι το όριο

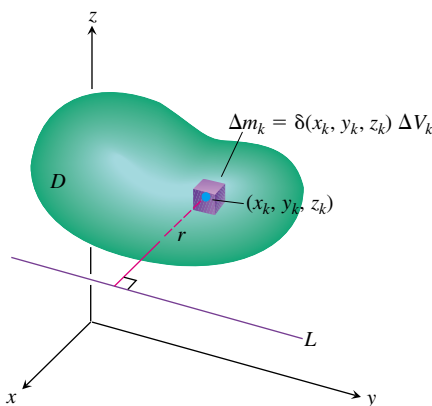
$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_D \delta(x, y, z) dV.$$

Για να βρούμε τις πρώτες ροπές ως προς τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, πολλαπλασιάζουμε την πυκνότητα με την προσημασμένη απόσταση από κάθε επίπεδο. Για παράδειγμα, η έκφραση

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta(x, y, z) dV$$

δίνει την πρώτη ροπή ως προς το επίπεδο  $yz$ .

Μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε την έννοια της ροπής αδρανείας σε τριπλά ολοκληρώματα. Αν  $r(x, y, z)$  είναι η απόσταση από το σημείο  $(x, y, z)$  του χωρίου  $D$  μέχρι την ευθεία  $L$ , τότε η ροπή αδρανείας της μάζας  $\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$  ως προς την ευθεία  $L$  (που φαίνεται στο Σχήμα 12.37) είναι περίπου  $\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k) \Delta m_k$ . **Η ροπή αδρανείας ως προς την ευθεία  $L$**  όλου του στερεού σώματος είναι



**ΣΧΗΜΑ 12.37** Για να ορίσουμε τη μάζα ενός σώματος και τη ροπή αδρανείας του ως προς μια ευθεία, θεωρούμε μια διαμέρισή του σε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων μάζας  $\Delta m_k$ .

$$I_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta I_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r^2(x_k, y_k, z_k) \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_D r^2 \delta dV.$$

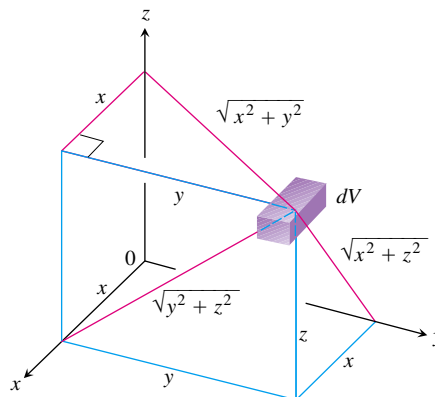
Αν η  $L$  είναι ο άξονας  $x$ , τότε  $r^2 = y^2 + z^2$  (Σχήμα 12.38) και

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta dV.$$

Ομοίως,

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta dV \quad \text{και} \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta dV.$$

Οι τύποι μάζας και ροπής στον χώρο είναι ανάλογοι των αντίστοιχων τύπων στο επίπεδο (Ενότητα 12.2) και συνοψίζονται στον Πίνακα 12.3.



**ΣΧΗΜΑ 12.38** Αποστάσεις του  $dV$  από τους άξονες συντεταγμένων και από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων.

CD-ROM  
Δικτυότοπος

CD-ROM  
Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Πάππος ο  
Αλεξανδρινός  
(περ. 300-350 μ.Χ.)

### Πίνακας 12.3 Τύποι μάζας και ροπής σώματος στον χώρο

**Μάζα:**  $M = \iiint_D \delta dV$  ( $\delta = \delta(x, y, z) =$  πυκνότητα)

**Πρώτες ροπές ως προς τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων:**

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \delta dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z \delta dV$$

**Κέντρο μάζας:**

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

**Ροπές αδρανείας (δεύτερες ροπές) ως προς τους άξονες συντεταγμένων:**

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta dV$$

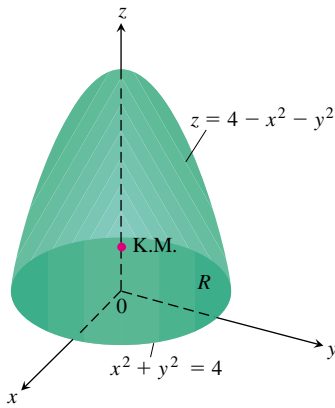
$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta dV$$

**Ροπές αδρανείας ως προς ευθεία  $L$ :**

$$I_L = \iiint_D r^2 \delta dV \quad (r(x, y, z) = \text{απόσταση από το σημείο } (x, y, z) \text{ μέχρι την ευθεία } L)$$

**Ακτίνα αδρανείας ως προς ευθεία  $L$ :**

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$



**ΣΧΗΜΑ 12.39** Στο Παράδειγμα 1 βρίσκουμε το κέντρο μάζας του στερεού του σχήματος.

### Παράδειγμα 1 Εύρεση κέντρου μάζας στερεού σώματος

Βρείτε το κέντρο μάζας ενός στερεού σταθερής πυκνότητας  $\delta$  που φράσσεται από κάτω από τον κυκλικό δίσκο  $R: x^2 + y^2 \leq 4$  του επιπέδου  $z = 0$ , και από πάνω από το παραβολοειδές  $z = 4 - x^2 - y^2$  (Σχήμα 12.39).

**Λύση** Λόγω συμμετρίας,  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Για να βρούμε το  $\bar{z}$ , υπολογίζουμε πρώτα

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta \, dz \, dy \, dx = \iint_R \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta \quad \text{Πολικές συντεταγμένες} \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{6} (4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}. \end{aligned}$$

Με παρόμοιο υπολογισμό, βρίσκουμε

$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz \, dy \, dx = 8\pi\delta.$$

Συνεπώς,  $\bar{z} = (M_{xy}/M) = 4/3$ , οπότε το κέντρο μάζας είναι  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ .

Όταν η πυκνότητα στερεού σώματος είναι σταθερή (όπως στο Παράδειγμα 1), τότε το κέντρο μάζας καλείται **κεντροειδές** του σώματος (όπως και στα διδιάστατα σχήματα της Ενότητας 12.2).

### Παράδειγμα 2 Εύρεση ροπών αδρανείας ως προς τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων

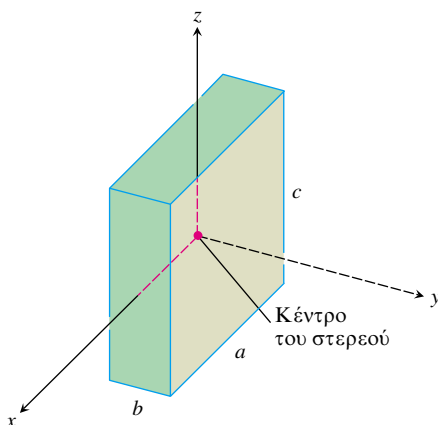
Βρείτε τα  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  για το ορθογώνιο στερεό σταθερής πυκνότητας  $\delta$  που φαίνεται στο Σχήμα 12.40.

**Λύση** Ο τύπος για το  $I_x$  δίνει

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz.$$

Μπορούμε να διευκολύνουμε τις πράξεις κάνοντας την παρατήρηση ότι η ποσότητα  $(y^2 + z^2)\delta$  είναι άρτια συνάρτηση των  $x$ ,  $y$ , και  $z$ , και συνεπώς

$$\begin{aligned} I_x &= 8 \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz = 4a\delta \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} (y^2 + z^2) \, dy \, dz \\ &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left[ \frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=0}^{y=b/2} dz \\ &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left( \frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz \\ &= 4a\delta \left( \frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48} \right) = \frac{abc\delta}{12} (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2). \end{aligned}$$



**ΣΧΗΜΑ 12.40** Στο Παράδειγμα 2 υπολογίζονται οι  $I_x$ ,  $I_y$ , και  $I_z$  για το στερεό του σχήματος. Η αρχή βρίσκεται στο κέντρο του στερεού.



Ομοίως,

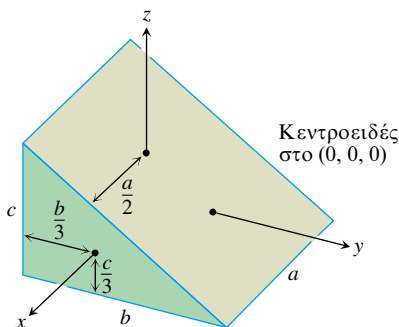
$$I_y = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \quad \text{και} \quad I_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.5

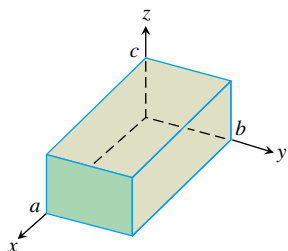
### Σταθερή πυκνότητα

Τα στερεά των Ασκήσεων 1-12 έχουν όλα σταθερή πυκνότητα  $\delta = 1$ .

1. **Επανερχόμενοι στο Παράδειγμα 1** Υπολογίστε απευθείας το ολοκλήρωμα  $I_x$  του Πίνακα 12.3 για να επιβεβαιώσετε τον σύντομο τρόπο υπολογισμού του Παραδείγματος 2. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 2 για να βρείτε την ακτίνα αδρανείας του ορθογώνιου στερεού ως προς κάθε άξονα συντεταγμένων.
2. **Ροπές αδρανείας** Οι άξονες συντεταγμένων στο σχήμα διέρχονται από το κεντροειδές της στερεάς σφηνοειδούς βαθμίδας, και είναι παράλληλοι προς τις πλευρές της. Βρείτε τις ποσότητες  $I_x$ ,  $I_y$ , και  $I_z$  για  $a = b = 6$  και  $c = 4$ .



3. **Ροπές αδρανείας** Για το ορθογώνιο στερεό του σχήματος, βρείτε τις ροπές αδρανείας  $I_x$ ,  $I_y$ , και  $I_z$ .



4. (α) **Κεντροειδές και ροπές αδρανείας** Βρείτε το κεντροειδές και τις ροπές αδρανείας  $I_x$ ,  $I_y$ , και  $I_z$  του τετραέδρου που έχει κορυφές τα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ , και  $(0, 0, 1)$ .  
(β) **Ακτίνα αδρανείας** Βρείτε την ακτίνα αδρανείας του τετραέδρου ως προς τον άξονα  $x$ . Συγκρίνετέ την με την απόσταση του κεντροειδούς από τον άξονα  $x$ .
5. **Κέντρο μάζας και ροπές αδρανείας** Μια στερεά «σκάφη» σταθερής πυκνότητας φράσσεται από κάτω από την επιφάνεια  $z = 4y^2$ , από πάνω από το επίπεδο  $z = 4$ , και

από μπροστά και πίσω από τα επίπεδα  $x = 1$  και  $x = -1$ . Βρείτε το κέντρο μάζας και τις ροπές αδρανείας ως προς τους τρεις άξονες.

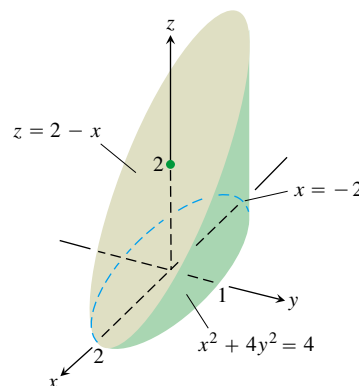
6. **Κέντρο μάζας** Ένα στερεό σταθερής πυκνότητας φράσσεται από κάτω από το επίπεδο  $z = 0$ , από τα πλάγια από τον ελλειπτικό κύλινδρο  $x^2 + 4y^2 = 4$ , και από πάνω από το επίπεδο  $z = 2 - x$  (δείτε το σχήμα).

(α) Βρείτε τα  $\bar{x}$  και  $\bar{y}$ .

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$M_{xy} = \int_{-2}^2 \int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2-x} z \, dz \, dy \, dx$$

κάνοντας χρήση πινάκων ολοκλήρωσης για την τελευταία ολοκλήρωση ως προς  $x$ . Στη συνέχεια διαιρέστε το  $M_{xy}$  με  $M$  για να επαληθεύσετε ότι  $\bar{z} = 5/4$ .



7. (α) **Κέντρο μάζας** Βρείτε το κέντρο μάζας του στερεού σταθερής πυκνότητας που φράσσεται από κάτω από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$  και από πάνω από το επίπεδο  $z = 4$ .  
(β) Βρείτε το επίπεδο  $z = c$  που διαιρεί το στερεό σε δύο μέρη ίσων όγκων. Το επίπεδο αυτό δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας.
8. **Ροπές και ακτίνες αδρανείας** Ένας στερεός κύβος με ακμή μήκους 2, φράσσεται από τα επίπεδα  $x = \pm 1$ ,  $z = \pm 1$ ,  $y = 3$ , και  $y = 5$ . Βρείτε το κέντρο μάζας του, τις ροπές αδρανείας, και τις ακτίνες αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων.
9. **Ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας ως προς ευθεία** Μια σφήνα όπως αυτή της Άσκησης 2 έχει  $a = 4$ ,  $b = 6$ , και  $c = 3$ . Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να βεβαιωθείτε ότι το τετράγωνο της απόστασης ενός τυπικού σημείου  $(x, y, z)$  της σφήνας από την ευθεία  $L: z = 0, y = 6$  ισούται με  $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$ . Κατόπιν υπολογίστε τη

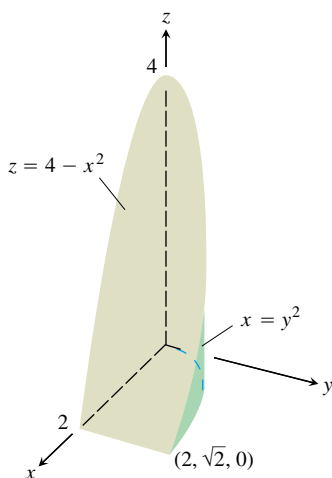
ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας της σφήνας ως προς την ευθεία  $L$ .

10. **Ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας ως προς ευθεία** Μια σφήνα όπως αυτή της Άσκησης 2 έχει  $a = 4$ ,  $b = 6$ , και  $c = 3$ . Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να βεβαιωθείτε ότι το τετράγωνο της απόστασης ενός τυπικού σημείου  $(x, y, z)$  της σφήνας από την ευθεία  $L$ :  $x = 4$ ,  $y = 0$  ισούται με  $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$ . Κατόπιν υπολογίστε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας της σφήνας ως προς την ευθεία  $L$ .
11. **Ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας ως προς ευθεία** Ένα στερεό όπως αυτό της Άσκησης 3 έχει  $a = 4$ ,  $b = 2$ , και  $c = 1$ . Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να βεβαιωθείτε ότι το τετράγωνο της απόστασης ενός τυπικού σημείου  $(x, y, z)$  του στερεού από την ευθεία  $L$ :  $y = 2$ ,  $z = 0$  ισούται με  $r^2 = (y - 2)^2 + z^2$ . Κατόπιν υπολογίστε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας του στερεού ως προς την ευθεία  $L$ .
12. **Ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας ως προς ευθεία** Ένα στερεό όπως αυτό της Άσκησης 3 έχει  $a = 4$ ,  $b = 2$ , και  $c = 1$ . Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να βεβαιωθείτε ότι το τετράγωνο της απόστασης ενός τυπικού σημείου  $(x, y, z)$  του στερεού από την ευθεία  $L$ :  $x = 4$ ,  $y = 0$  ισούται με  $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$ . Κατόπιν υπολογίστε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας του στερεού ως προς την ευθεία  $L$ .

### Μεταβαλλόμενη πυκνότητα

Στις Ασκήσεις 13 και 14, βρείτε

- (α) Τη μάζα του στερεού  
(β) Το κέντρο μάζας.
13. Ένα στερεό χωρίο του πρώτου οκταμορίου φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων και το επίπεδο  $x + y + z = 2$ . Η πυκνότητα του στερεού είναι  $\delta(x, y, z) = 2x$ .
14. Ένα στερεό χωρίο του πρώτου οκταμορίου φράσσεται από τα επίπεδα  $y = 0$  και  $z = 0$ , καθώς και από τις επιφάνειες  $z = 4 - x^2$  και  $x = y^2$  (δείτε το σχήμα). Η συνάρτηση πυκνότητας του στερεού είναι  $\delta(x, y, z) = kxy$ , όπου  $k$  σταθερά.



Στις Ασκήσεις 15 και 16, βρείτε

- (α) Τη μάζα του στερεού  
(β) Το κέντρο μάζας

- (γ) Τις ροπές αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων  
(δ) Τις ακτίνες αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων.
15. Ένας στερεός κύβος στο πρώτο οκταμόριο φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, καθώς και από τα επίπεδα  $x = 1$ ,  $y = 1$ , και  $z = 1$ . Η πυκνότητα του κύβου δίνεται από τη συνάρτηση  $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ .
16. Μια σφήνα όπως αυτή της Άσκησης 2 έχει διαστάσεις  $a = 2$ ,  $b = 6$ , και  $c = 3$ . Η συνάρτηση πυκνότητας είναι  $\delta(x, y, z) = x + 1$ . Σημειώστε ότι αν η πυκνότητα είναι σταθερή, το κέντρο μάζας θα είναι  $(0, 0, 0)$ . Να βρεθούν τα  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ .
17. **Μάζα** Βρείτε τη μάζα του στερεού που φράσσεται από τα επίπεδα  $x + z = 1$ ,  $x - z = -1$ ,  $y = 0$  και από την επιφάνεια  $y = \sqrt{z}$ . Η πυκνότητα του στερεού είναι  $\delta(x, y, z) = 2y + 5$ .
18. **Μάζα** Βρείτε τη μάζα του στερεού που φράσσεται από τις παραβολικές επιφάνειες  $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$  και  $z = 2x^2 + 2y^2$  δεδομένου ότι η πυκνότητα του στερεού είναι  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### Έργο

Στις Ασκήσεις 19 και 20, υπολογίστε τις εξής ποσότητες.

- (α) Το έργο που εκτελείται από τη βαρυτική δύναμη (για σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ ) κατά τη μετατόπιση του υγρού περιεχομένου του δοχείου στο επίπεδο  $xy$ . (Υπόδειξη: Διαμερίστε το υγρό σε μικρά στοιχεία όγκου  $\Delta V_i$  και βρείτε (κατά προσέγγιση) το έργο που εκτελεί η βαρυτική δύναμη για τη μετακίνηση κάθε στοιχείου όγκου. Αθροίζοντας και παίρνοντας κατόπιν το όριο, καταλήγετε σε ένα τριπλό ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογίσετε.)
- (β) Το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετατόπιση μάζας ίσης με τη συνολική μάζα του υγρού, η οποία είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας, μέχρι το επίπεδο  $xy$ .
19. Το δοχείο είναι ένα κυβικό κουτί στο πρώτο οκταμόριο και φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, καθώς και από τα επίπεδα  $x = 1$ ,  $y = 1$ , και  $z = 1$ . Η πυκνότητα του υγρού περιεχομένου του δοχείου δίνεται από τη συνάρτηση  $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$  (δείτε την Άσκηση 15).
20. Το δοχείο έχει το σχήμα του χωρίου που φράσσεται από τις επιφάνειες  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 4 - x^2$ , και  $x = y^2$ . Η πυκνότητα του υγρού περιεχομένου του δοχείου δίνεται από τη συνάρτηση  $\delta(x, y, z) = kxy$ , όπου  $k$  σταθερά. (Δείτε την Άσκηση 14).

### Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Ασκήσεις 12.2) ισχύει επίσης στις τρεις διαστάσεις. Έστω  $L_{\kappa,\mu}$  μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο μάζας σώματος με μάζα  $m$  και έστω  $L$  μια ευθεία παράλληλη στην  $L_{\kappa,\mu}$  και απέχουσα  $h$  από αυτήν. Το **θεώρημα των παράλληλων αξόνων** λέει ότι οι ροπές αδρανείας  $I_{\kappa,\mu}$  και  $I_L$  του σώματος ως προς τις ευθείες  $L_{\kappa,\mu}$  και  $L$  θα ικανοποιούν την εξίσωση



28. Μια στερεά πυραμίδα  $P$  με ύψος  $h$  και τέσσερις ίσες πλευρές έχει ως βάση τη μία έδρα του στερεού κύβου  $C$  του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος  $s$ . Το κεντροειδές της στερεάς πυραμίδας βρίσκεται στο ένα τέταρτο της απόστασης από τη βάση έως την κορυφή. Ποια

σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ των  $h$  και  $s$  ώστε το κεντροειδές της ένωσης  $P \cup C$  να ανήκει στη βάση της πυραμίδας; Συγκρίνετε την απάντησή σας με τα αποτελέσματά σας στην Άσκηση 27, καθώς και στην Άσκηση 56 της Ενότητας 12.2.

## 12.6

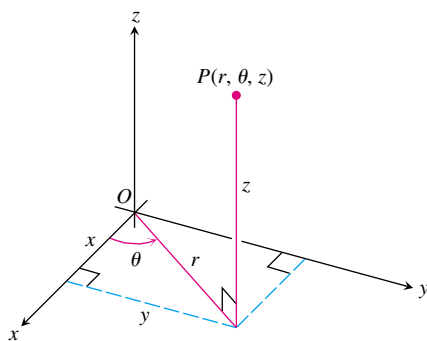
### Τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Ολοκλήρωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες • Σφαιρικές συντεταγμένες • Ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες

Πολλές εφαρμογές που αφορούν τους φυσικούς, τους μηχανικούς, ή τους γεωμέτρους, περιλαμβάνουν κυλίνδρους, κώνους, ή σφαίρες. Στις περιπτώσεις αυτές οι υπολογισμοί απλοποιούνται αν χρησιμοποιηθούν κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

#### Ολοκλήρωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες προκύπτουν αν συνδυάσουμε τις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου  $xy$  με την καρτεσιανή συντεταγμένη  $z$ . Έτσι, σε κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί μία ή περισσότερες τριάδες της μορφής  $(r, \theta, z)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.41.



**ΣΧΗΜΑ 12.41** Οι κυλινδρικές συντεταγμένες σημείου στον χώρο είναι  $r$ ,  $\theta$ , και  $z$ .

#### Ορισμός Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες παριστάνουν ένα σημείο  $P$  του χώρου μέσω της διατεταγμένης τριάδας  $(r, \theta, z)$  όπου

1.  $r$  και  $\theta$  είναι οι πολικές συντεταγμένες της κατακόρυφης προβολής του  $P$  στο επίπεδο  $xy$  και
2.  $z$  είναι η ορθογώνια (καρτεσιανή) κατακόρυφη συντεταγμένη.

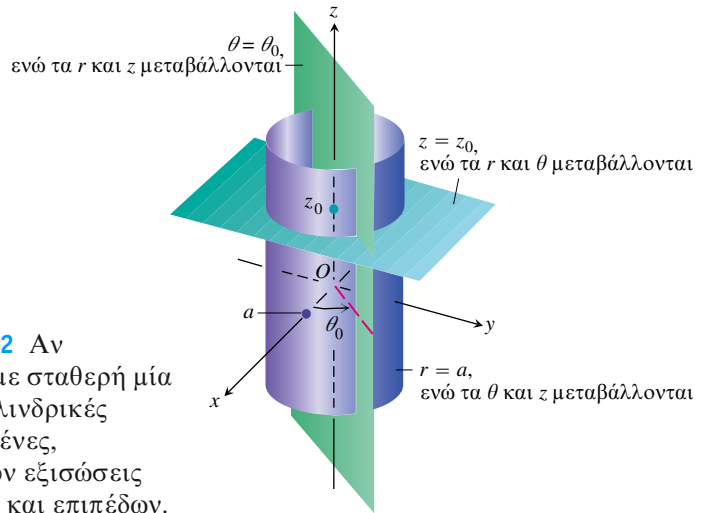
Τα  $x$ ,  $y$ ,  $r$ , και  $\theta$  των ορθογώνιων (καρτεσιανών) και των κυλινδρικών συντεταγμένων συνδέονται με τις συνήθειες εξισώσεις.

#### Εξισώσεις που συνδέουν τις ορθογώνιες $(x, y, z)$ και τις κυλινδρικές $(r, \theta, z)$ συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= z, \\ r^2 &= x^2 + y^2, & \tan \theta &= y/x \end{aligned}$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η εξίσωση  $r = a$  περιγράφει όχι απλώς έναν κύκλο του επιπέδου  $xy$ , αλλά έναν πλήρη κύλινδρο γύρω από τον άξονα  $z$  (Σχήμα 12.42). Ο άξονας  $z$  δίνεται από την εξίσωση  $r = 0$ . Η εξίσωση  $\theta = \theta_0$  περιγράφει το επίπεδο που περιέχει τον άξονα  $z$  και σχηματίζει γωνία  $\theta_0$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$ . Τέλος, η εξίσωση  $z = z_0$  περιγράφει το κάθετο στον άξονα  $z$  επίπεδο (ακριβώς όπως και για τις καρτεσιανές συντεταγμένες).

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες προσφέρονται για την περιγραφή κυλίνδρων των οποίων οι άξονες συμπίπτουν με τον άξονα  $z$ , και επι-



**ΣΧΗΜΑ 12.42** Αν κρατήσουμε σταθερή μία από τις κυλινδρικές συντεταγμένες, προκύπτουν εξισώσεις κυλίνδρων και επιπέδων.

πέδων που είτε περιέχουν τον άξονα  $z$  είτε είναι κάθετα προς αυτόν. Τέτοιου είδους επιφάνειες έχουν εξισώσεις με σταθερή τη μία συντεταγμένη τους:

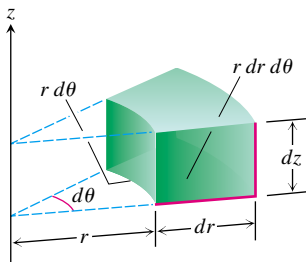
$$r = 4$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2.$$

Το στοιχείο όγκου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$dV = dz r dr d\theta \quad (1)$$



**ΣΧΗΜΑ 12.43** Το στοιχείο όγκου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι  $dV = dz r dr d\theta$ .

(Σχήμα 12.43). Τώρα μπορούμε να υπολογίζουμε τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες εκτελώντας διαδοχική ολοκλήρωση, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα.

### Παράδειγμα 1 Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

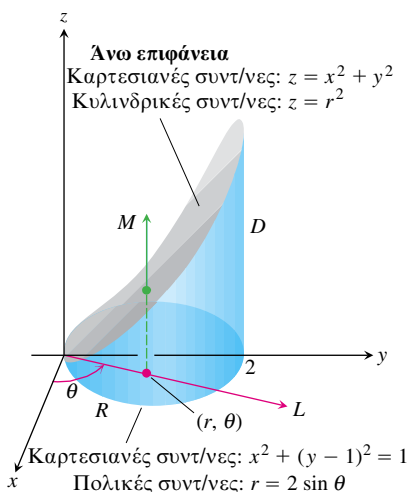
Βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, της συνάρτησης  $f(r, \theta, z)$  στο χωρίο  $D$  το οποίο φράσσεται από το επίπεδο  $z = 0$ , από τον κυκλικό κύλινδρο  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , και από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ .

#### Λύση

Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα (Σχήμα 12.44). Η βάση του χωρίου  $D$  συμπίπτει με την προβολή του,  $R$ , στο επίπεδο  $xy$ . Το σύνορο του χωρίου προβολής  $R$  είναι ο κύκλος  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Η εξίσωση του κύκλου αυτού, σε πολικές συντεταγμένες, είναι

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ r^2 - 2r \sin \theta &= 0 \\ r &= 2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Βήμα 2: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $z$ . Μια ευθεία  $M$  που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο  $(r, \theta)$  του  $R$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $z$  εισέρχεται στο  $D$  για  $z = 0$  και εξέρχεται για  $z = x^2 + y^2 = r^2$ .



**ΣΧΗΜΑ 12.44** Σχήμα για το Παράδειγμα 1.

Βήμα 3: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $r$ . Μια ημιευθεία  $L$  που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο  $(r, \theta)$  εισέρχεται στο  $R$  για  $r = 0$  και εξέρχεται για  $r = 2 \sin \theta$ .

Βήμα 4: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ . Καθώς η  $L$  σαρώνει το  $R$ , η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα  $x$  μεταβάλλεται από  $\theta = 0$  έως  $\theta = \pi$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\iiint_D f(r, \theta, z) dV = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^r f(r, \theta, z) dz r dr d\theta.$$

Στο Παράδειγμα 1 παρατίθεται μια χρήσιμη διαδικασία εύρεσης ορίων ολοκλήρωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η διαδικασία αυτή συνοψίζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

### Πώς ολοκληρώνουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Για να υπολογίσουμε το

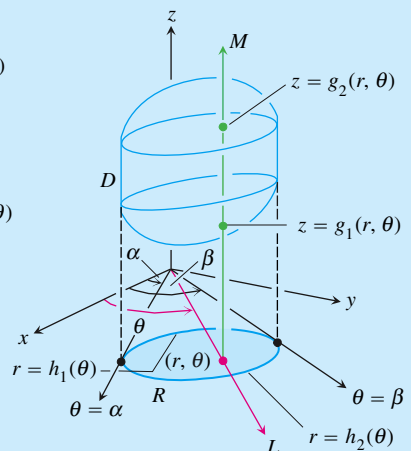
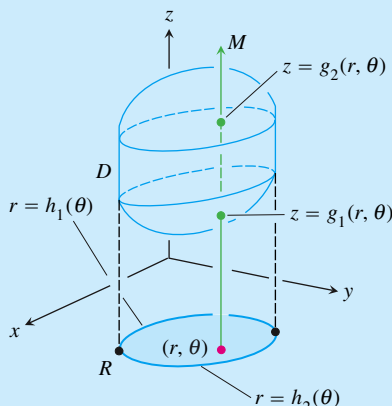
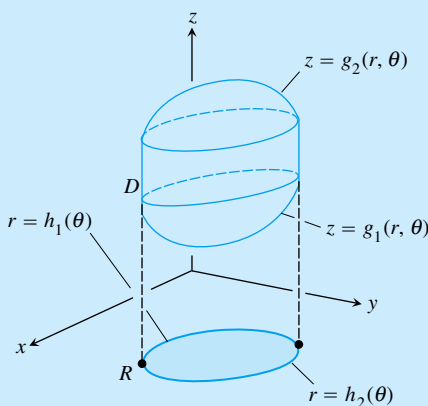
$$\iiint_D f(r, \theta, z) dV$$

σε ένα χωρίο  $D$  του χώρου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς  $z$ , έπειτα ως προς  $r$ , και τελικά ως προς  $\theta$ , ακολουθούμε τα εξής βήματα.

Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα. Απεικονίζουμε το χωρίο  $D$ , καθώς και την προβολή του,  $R$ , στο επίπεδο  $xy$ . Σημειώνουμε στο σχήμα τις επιφάνειες και τις καμπύλες που αποτελούν σύνορα των  $D$  και  $R$ .

Βήμα 2: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $z$ . Φέρουμε μια ευθεία  $M$  που διέρχεται από ένα τυπικό σημείο  $(r, \theta)$  του  $R$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ . Καθώς το  $z$  αυξάνεται, η  $M$  εισέρχεται στο  $D$  για  $z = g_1(r, \theta)$  και εξέρχεται για  $z = g_2(r, \theta)$ . Αυτά είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .

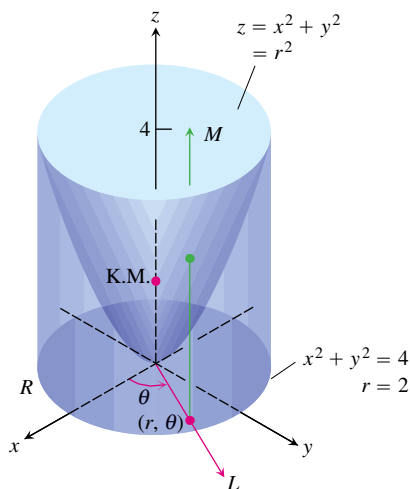
Βήμα 3: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $r$ . Από την αρχή των αξόνων φέρουμε από την αρχή μια ημιευθεία  $L$  που διέρχεται από το σημείο  $(r, \theta)$ . Η ημιευθεία αυτή εισέρχεται στο  $R$  για  $r = h_1(\theta)$  και εξέρχεται για  $r = h_2(\theta)$ . Αυτά είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $r$ .



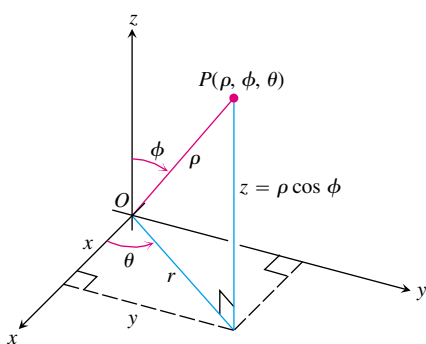
Βήμα 4: Όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ . Καθώς η ημιευθεία  $L$  σαρώνει το  $R$ , η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα  $x$  μεταβάλλεται από  $\theta = \alpha$  σε  $\theta = \beta$ . Αυτά είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ . Το ολοκλήρωμα είναι λοιπόν

$$\iiint_D f(r, \theta, z) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} \int_{z=g_1(r, \theta)}^{z=g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta.$$





**ΣΧΗΜΑ 12.45** Στο Παράδειγμα 2 εξηγούμε πώς βρίσκουμε το κεντροειδές του στερεού αυτού.



**ΣΧΗΜΑ 12.46** Οι σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\phi$ , και  $\theta$ , και η σχέση τους με τα  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , και  $r$ .

Σε μερικά συγγράμματα οι σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται με τη σειρά  $(\rho, \theta, \phi)$ . Ενίοτε χρησιμοποιείται επίσης το σύμβολο  $r$  αντί του  $\rho$ .

## Παράδειγμα 2 Εύρεση κεντροειδούς

Βρείτε το κεντροειδές ( $\delta = 1$ ) του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$ , και είναι άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ , και κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $xy$ .

### Λύση

**Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα.** Σχεδιάζουμε το στερεό, το οποίο είναι άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = r^2$  και κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$  (Σχήμα 12.45). Η βάση του  $R$  είναι ο κυκλικός δίσκος  $|r| \leq 2$  του επιπέδου  $xy$ .

Το κεντροειδές  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  του στερεού κείται πάνω στον άξονα συμμετρίας του, που εδώ είναι ο άξονας  $z$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Προκειμένου να βρούμε το  $\bar{z}$ , διαιρούμε την πρώτη ροπή  $M_{xy}$  με τη μάζα  $M$ .

Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης των ολοκληρωμάτων μάζας και ροπής, εκτελούμε τα τέσσερα βασικά βήματα. Το βήμα 1 το εκτελέσαμε ήδη κάνοντας το αρχικό σχήμα. Τα υπόλοιπα βήματα θα μας δώσουν τα όρια ολοκλήρωσης.

**Βήμα 2: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $z$ .** Μια ευθεία  $M$  που διέρχεται από το τυπικό σημείο  $(r, \theta)$  της βάσης η οποία είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ , εισέρχεται στο στερεό για  $z = 0$  και εξέρχεται για  $z = r^2$ .

**Βήμα 3: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $r$ .** Μια ημιευθεία  $L$  που ξεκινά από την αρχή και διέρχεται από το  $(r, \theta)$  εισέρχεται στο χωρίο  $R$  για  $r = 0$  και εξέρχεται για  $r = 2$ .

**Βήμα 4: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ .** Καθώς η  $L$  σαρώνει τη βάση του στερεού με δεξιόστροφη φορά, η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα  $x$  μεταβάλλεται από  $\theta = 0$  σε  $\theta = 2\pi$ . Η ποσότητα  $M_{xy}$  ισούται με

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} z \, dz \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r^5}{2} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^6}{12} \right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \, d\theta = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

Η μάζα  $M$  ισούται με

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} dz \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ z \right]_0^{r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

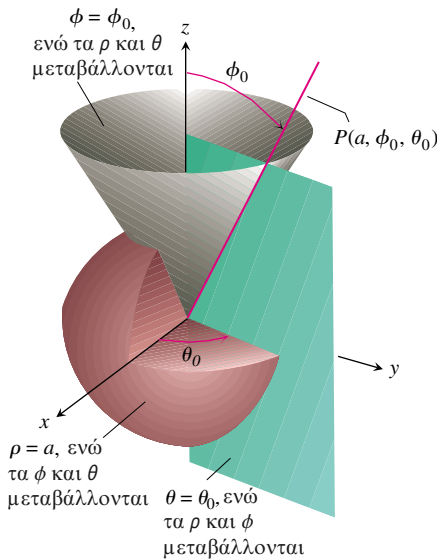
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3} \frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3},$$

και άρα το κεντροειδές είναι  $(0, 0, 4/3)$ . Σημειώστε ότι το κεντροειδές κείται εκτός του στερεού.

## Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες ορίζουν σημεία του χώρου μέσω δύο γωνιών και μίας αποστάσεως, καθώς φαίνεται στο Σχήμα 12.46.

Η πρώτη συντεταγμένη,  $\rho = |\vec{OP}|$ , είναι η απόσταση του σημεί-



**ΣΧΗΜΑ 12.47** Αν κρατήσουμε σταθερή τη μία από τις σφαιρικές συντεταγμένες, προκύπτουν εξισώσεις σφαιρών, κώνων, και ημιεπιπέδων.

ου από την αρχή. Σε αντίθεση με τη μεταβλητή  $r$ , η μεταβλητή  $\rho$  δεν είναι ποτέ αρνητική. Η δεύτερη συντεταγμένη,  $\phi$ , είναι η γωνία που σχηματίζει το  $\vec{OP}$  με τον θετικό ημιάξονα  $z$ . Η γωνία αυτή οφείλει να ανήκει στο διάστημα  $[0, \pi]$ . Η τρίτη συντεταγμένη είναι η γωνία  $\theta$  των κυλινδρικών συντεταγμένων.

### Ορισμός Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι **σφαιρικές συντεταγμένες** παριστάνουν ένα σημείο  $P$  στον χώρο με τη διατεταγμένη τριάδα αριθμών  $(\rho, \phi, \theta)$  όπου

1.  $\rho$  είναι η απόσταση από το  $P$  έως την αρχή των αξόνων
2.  $\phi$  είναι η γωνία που σχηματίζει το  $\vec{OP}$  με τον θετικό ημιάξονα  $z$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ )
3.  $\theta$  είναι η ίδια γωνία που εμφανίζεται και στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

Η εξίσωση  $\rho = a$  περιγράφει μια σφαίρα με ακτίνα  $a$  και κέντρο την αρχή (Σχήμα 12.47). Η εξίσωση  $\phi = \phi_0$  περιγράφει έναν απλό κώνο με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα τον άξονα  $z$ . (Διευρύνουμε την έννοια της κωνικής επιφάνειας θεωρώντας το επίπεδο  $xy$  ως τον κώνο  $\phi = \pi/2$ .) Αν το  $\phi_0$  είναι μεγαλύτερο του  $\pi/2$ , τότε ο κώνος  $\phi = \phi_0$  «ανοίγει» προς τα κάτω. Η εξίσωση  $\theta = \theta_0$  περιγράφει το ημιεπίπεδο που περιέχει τον άξονα  $z$  και σχηματίζει γωνία  $\theta_0$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$ .

### Εξισώσεις που συνδέουν τις σφαιρικές συντεταγμένες με τις καρτεσιανές και τις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin \phi, & x &= r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ z &= \rho \cos \phi, & y &= r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

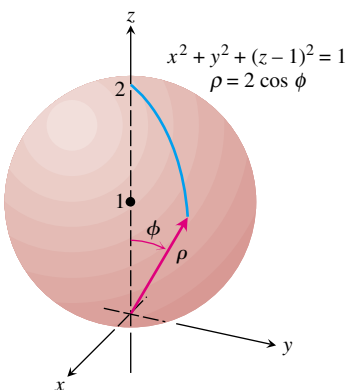
### Παράδειγμα 3 Μετατροπή καρτεσιανών σε σφαιρικές συντεταγμένες

Βρείτε μια εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες για τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ .

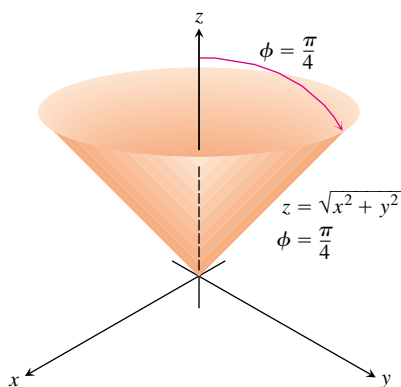
**Λύση** Χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις (3) για να αντικαταστήσουμε τα  $x$ ,  $y$ , και  $z$ :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= 1 \\ \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (\rho \cos \phi - 1)^2 &= 1 \quad \text{Εξισώσεις (3)} \\ \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \phi - 2\rho \cos \phi + 1 &= 1 \\ \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) &= 2\rho \cos \phi \\ \rho^2 &= 2\rho \cos \phi \\ \rho &= 2 \cos \phi. \end{aligned}$$

Δείτε το Σχήμα 12.48.



**ΣΧΗΜΑ 12.48** Η σφαίρα του Παραδείγματος 3.



**ΣΧΗΜΑ 12.49** Ο κώνος του Παραδείγματος 4.

#### Παράδειγμα 4 Μετατροπή καρτεσιανών συντεταγμένων σε σφαιρικές

Εκφράστε σε σφαιρικές συντεταγμένες την εξίσωση του κώνου  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (Σχήμα 12.49).

**Λύση 1** Με χρήση γεωμετρίας. Ο κώνος είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα  $z$  και τέμνει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $yz$  στην ευθεία  $z = y$ . Η γωνία που σχηματίζει ο κώνος με τον θετικό ημιάξονα  $z$  ισούται συνεπώς με  $\pi/4$  ακτίνια. Ο κώνος αποτελείται από σημεία για τα οποία το  $\phi$  ισούται με  $\pi/4$ , οπότε η εξίσωση που τον περιγράφει είναι  $\phi = \pi/4$ .

**Λύση 2** Με χρήση άλγεβρας. Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (3) για να αντικαταστήσουμε τα  $x$ ,  $y$ , και  $z$ , παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

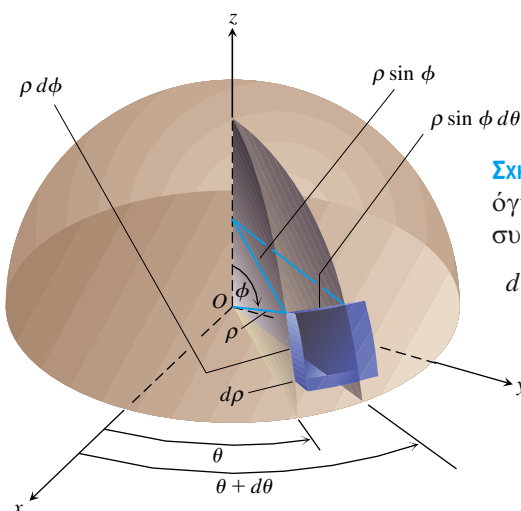
$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \phi &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} && \text{Παράδειγμα 3} \\ \rho \cos \phi &= \rho \sin \phi && \rho \geq 0, \sin \phi \geq 0 \\ \cos \phi &= \sin \phi \\ \phi &= \frac{\pi}{4}. && 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

#### Ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες χρησιμεύουν για να περιγράψουμε σφαίρες που έχουν κέντρο την αρχή των αξόνων, ημιεπίπεδα που περιέχουν τον άξονα  $z$ , και απλούς κώνους με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα τον άξονα  $z$ . Οι επιφάνειες αυτές έχουν εξισώσεις στις οποίες η μία συντεταγμένη είναι σταθερή:

$$\begin{aligned} \rho &= 4 && \text{Σφαίρα, με ακτίνα 4 και κέντρο την αρχή των αξόνων} \\ \phi &= \frac{\pi}{3} && \text{Κώνος, που έχει κορυφή στην αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία } \pi/3 \text{ ακτίνων με τον θετικό ημιάξονα } z \\ \theta &= \frac{\pi}{3} && \text{Ημιεπίπεδο, που περιέχει τον άξονα } z, \text{ και σχηματίζει γωνία } \pi/3 \text{ ακτίνων με τον θετικό ημιάξονα } x \end{aligned}$$

Το στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες περιγράφει τον όγκο του χωρίου που ορίζεται από τα διαφορικά  $d\rho$ ,  $d\phi$ , και  $d\theta$  (Σχήμα 12.50). Το χωρίο έχει περίπου τον όγκο ορθογωνίου «κιβωτίου» του οποίου η μία πλευρά είναι το κυκλικό τόξο μήκους  $\rho d\phi$ , η άλλη πλευρά είναι το κυκλικό τόξο μήκους  $\rho \sin \phi d\theta$ , και η τρίτη πλευρά (το πάχος του κιβωτίου) ισούται με  $d\rho$ . Συνεπώς, το στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι



**ΣΧΗΜΑ 12.50** Το στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} dV &= d\rho \cdot \rho d\phi \cdot \rho \sin \phi d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta, \quad (4)$$

και τα τριπλά ολοκληρώματα παίρνουν τη μορφή

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta) \, dV = \iiint_D F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta. \quad (5)$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά ολοκληρώνοντας συνήθως πρώτα ως προς  $\rho$ . Η διαδικασία εύρεσης των ορίων ολοκλήρωσης περιγράφεται αμέσως παρακάτω. Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε περιοχές ολοκλήρωσης που έχουν το σχήμα στερεών εκ περιστροφής ως προς τον άξονα  $z$  και όπου τα όρια ολοκλήρωσης των  $\theta$  και  $\phi$  είναι σταθερά.

### Πώς ολοκληρώνουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες

Για να υπολογίσουμε το

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) \, dV$$

σε χωρίο  $D$  του χώρου σε σφαιρικές συντεταγμένες, εκτελώντας πρώτα την ολοκλήρωση ως προς  $\rho$ , έπειτα ως προς  $\phi$ , και τελικά ως προς  $\theta$ , ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

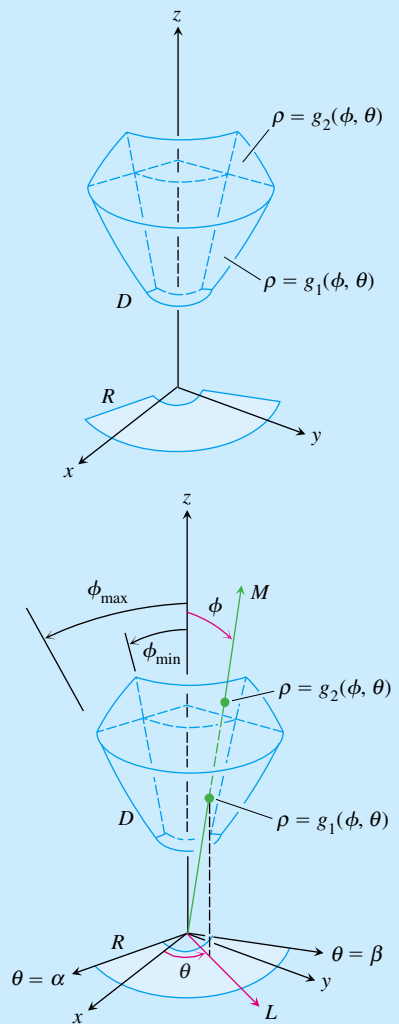
**Βήμα 1: Σχεδιάγραμμα.** Σχεδιάζουμε το χωρίο  $D$  καθώς και την προβολή του  $R$  στο επίπεδο  $xy$ . Σημειώνουμε στο σχήμα τις επιφάνειες που αποτελούν σύνορο του  $D$ .

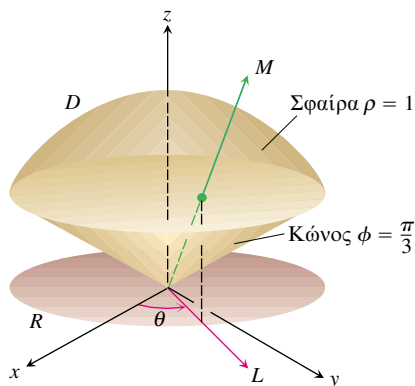
**Βήμα 2: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\rho$ .** Φέρνουμε μια ημιευθεία  $M$  από την αρχή έτσι ώστε να διέρχεται από το  $D$  και να σχηματίζει γωνία  $\phi$  με τον θετικό ημιάξονα  $z$ . Προβάλλουμε την  $M$  στο επίπεδο  $xy$  (καλούμε την προβολή  $L$ ). Η ημιευθεία  $L$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$ . Καθώς το  $\rho$  αυξάνεται, η  $M$  εισέρχεται στο  $D$  για  $\rho = g_1(\phi, \theta)$  και εξέρχεται για  $\rho = g_2(\phi, \theta)$ . Αυτά είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\rho$ .

**Βήμα 3: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\phi$ .** Για δεδομένο  $\theta$ , η γωνία  $\phi$  που σχηματίζει η  $M$  με τον θετικό ημιάξονα  $z$  μεταβάλλεται από  $\phi = \phi_{\min}$  έως  $\phi = \phi_{\max}$ . Αυτά είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\phi$ .

**Βήμα 4: Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ .** Η ημιευθεία  $L$  σαρώνει το χωρίο  $R$  καθώς το  $\theta$  μεταβάλλεται από  $\alpha$  έως  $\beta$ . Αυτά είναι τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ . Το ολοκλήρωμα είναι

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) \, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\phi=\phi_{\min}}^{\phi=\phi_{\max}} \int_{\rho=g_1(\phi, \theta)}^{\rho=g_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta. \quad (6)$$





**ΣΧΗΜΑ 12.51** Η επιφάνεια του Παραδείγματος 5 έχει σχήμα που μοιάζει με παγωτό χωνάκι.

### Παράδειγμα 5 Εύρεση όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες

Βρείτε τον όγκο του χωρίου  $D$  που αποκόπτεται από τη στερεά σφαίρα  $\rho \leq 1$  ο κώνος  $\phi = \pi/3$ .

**Λύση** Ο όγκος ισούται με  $V = \iiint_D \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ , δηλαδή με το ολοκλήρωμα της  $f(\rho, \phi, \theta) = 1$  στο  $D$ .

Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης, εκτελούμε τα εξής βήματα.

Βήμα 1: *Σχεδιάγραμμα.* Σχεδιάζουμε το χωρίο  $D$  και την προβολή του  $R$  στο επίπεδο  $xy$  (Σχήμα 12.51).

Βήμα 2: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\rho$ .* Φέρνουμε μια ημιευθεία  $M$  από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε να διέρχεται από το  $D$  και να σχηματίζει γωνία  $\phi$  με τον θετικό ημιάξονα  $z$ . Φέρνουμε επίσης την  $L$ , που είναι η προβολή της  $M$  στο επίπεδο  $xy$ . Σημειώνουμε στο σχήμα τη γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η  $L$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$ . Η ημιευθεία  $M$  εισέρχεται στο  $D$  για  $\rho = 0$  και εξέρχεται για  $\rho = 1$ .

Βήμα 3: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\phi$ .* Ο κώνος  $\phi = \pi/3$  σχηματίζει γωνία  $\pi/3$  με τον θετικό ημιάξονα  $z$ . Για δεδομένο  $\theta$ , η γωνία  $\phi$  μπορεί να μεταβάλλεται από  $\phi = 0$  έως  $\phi = \pi/3$ .

Βήμα 4: *Όρια ολοκλήρωσης ως προς  $\theta$ .* Η ημιευθεία  $L$  σαρώνει το  $R$  καθώς το  $\theta$  μεταβάλλεται από 0 σε  $2\pi$ . Ο όγκος ισούται με

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{6} (2\pi) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

### Παράδειγμα 6 Εύρεση ροπής αδρανείας

Ένα στερεό σταθερής πυκνότητας  $\delta = 1$  καταλαμβάνει το χωρίο  $D$  του Παραδείγματος 5. Βρείτε τη ροπή αδρανείας του στερεού ως προς τον άξονα  $z$ .

**Λύση** Σε ορθογώνιες συντεταγμένες, η ροπή αδρανείας δίδεται από τον τύπο

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \, dV.$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες,  $x^2 + y^2 = (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$ . Συνεπώς,

$$I_z = \iiint (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \iiint \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Για το χωρίο του Παραδείγματος 5, το τελευταίο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \sin^3 \phi \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[ -\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi/3} d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{5}{24} d\theta = \frac{1}{24} (2\pi) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

### Τύποι μετατροπής συντεταγμένων

**Κυλινδρικές σε  
καρτεσιανές**

**Σφαιρικές σε  
καρτεσιανές**

**Σφαιρικές σε  
κυλινδρικές**

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$r = \rho \sin \phi$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\theta = \theta$$

Τα αντίστοιχα στοιχεία όγκου είναι

$$dV = dx \, dy \, dz$$

$$= dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.6

### Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα που δίνονται στις Ασκήσεις 1-6.

$$1. \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$2. \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$3. \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta/2\pi} \int_0^{3+24r^2} dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$4. \int_0^\pi \int_0^{\theta/\pi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$5. \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3 \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$6. \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

### Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες, μπορεί να καταφέρουμε να απλοποιήσουμε τον

υπολογισμό. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 7-10.

$$7. \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{z/3} r^3 \, dr \, dz \, d\theta$$

$$8. \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} 4r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$9. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) \, r \, d\theta \, dr \, dz$$

$$10. \int_0^2 \int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} (r \sin \theta + 1) \, r \, d\theta \, dz \, dr$$

11. Έστω  $D$  το χωρίο που είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$ , άνω φραγμένο από τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , και πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$ . Σχηματίστε τα τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες τα οποία δίνουν τον όγκο του  $D$ , με τις ακόλουθες σειρές ολοκλήρωσης.

$$(a) \, dz \, dr \, d\theta$$

$$(b) \, dr \, dz \, d\theta$$

$$(c) \, d\theta \, dz \, dr$$

12. Έστω  $D$  το χωρίο που είναι κάτω φραγμένο από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Σχηματίστε τα τριπλά ολο-



κλήρώματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες τα οποία δίνουν τον όγκο του  $D$ , με τις ακόλουθες σειρές ολοκλήρωσης.

(α)  $dz \, dr \, d\theta$

(β)  $dr \, dz \, d\theta$

(γ)  $d\theta \, dz \, dr$

13. Βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης του

$$\iiint f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

στο χωρίο που είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$ , πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $r = \cos \theta$ , και άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 3r^2$ .

14. Μετατρέψτε το ολοκλήρωμα

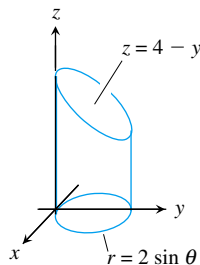
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) \, dz \, dx \, dy$$

σε ισοδύναμο ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το οποίο και υπολογίστε.

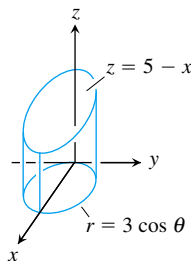
### Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Στις Ασκήσεις 15-20, βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του  $\iiint_D f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta$  στην περιοχή  $D$ .

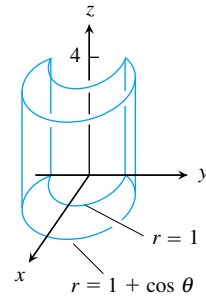
15.  $D$  είναι ο ορθός κυκλικός κύλινδρος του οποίου βάση είναι ο κύκλος  $r = 2 \sin \theta$  στο επίπεδο  $xy$ , και η άνω πλευρά του ανήκει στο επίπεδο  $z = 4 - y$ .



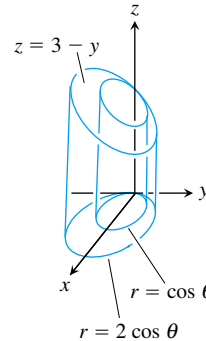
16.  $D$  είναι ο ορθός κυκλικός κύλινδρος του οποίου βάση είναι ο κύκλος  $r = 3 \cos \theta$ , και η άνω πλευρά του ανήκει στο επίπεδο  $z = 5 - x$ .



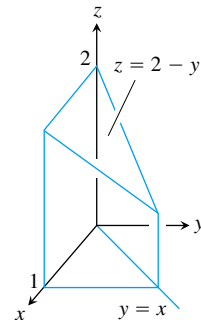
17.  $D$  είναι ο στερεός ορθός κύλινδρος του οποίου βάση είναι η περιοχή του επιπέδου  $xy$  που βρίσκεται εντός της καρδιοειδούς  $r = 1 + \cos \theta$  και εκτός του κύκλου  $r = 1$ , και του οποίου η άνω πλευρά ανήκει στο επίπεδο  $z = 4$ .



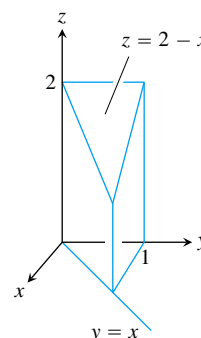
18.  $D$  είναι ο στερεός ορθός κύλινδρος του οποίου βάση είναι η περιοχή μεταξύ των κύκλων  $r = \cos \theta$  και  $r = 2 \cos \theta$ , και του οποίου η άνω πλευρά ανήκει στο επίπεδο  $z = 3 - y$ .



19.  $D$  είναι το πρίσμα του οποίου βάση είναι το τρίγωνο του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τον άξονα  $x$  και από τις ευθείες  $y = x$  και  $x = 1$ . Η άνω πλευρά του πρίσματος ανήκει στο επίπεδο  $z = 2 - y$ .



20.  $D$  είναι το πρίσμα του οποίου βάση είναι το τρίγωνο του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τον άξονα  $y$  και από τις ευθείες  $y = x$  και  $y = 1$ . Η άνω πλευρά του πρίσματος ανήκει στο επίπεδο  $z = 2 - x$ .



## Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε σφαιρικές συντεταγμένες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 21-26.

$$21. \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$22. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$23. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{(1-\cos \phi)/2} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$24. \int_0^{3\pi/2} \int_0^\pi \int_0^1 5\rho^3 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$25. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\sec \phi}^2 3\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$26. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\sec \phi} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

## Αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες, μπορεί να καταφέρουμε να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 27-30.

$$27. \int_0^2 \int_{-\pi}^0 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \sin 2\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$$

$$28. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_{\csc \phi}^{2 \csc \phi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$$

$$29. \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/4} 12\rho \sin^3 \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$$

$$30. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc \phi}^2 5\rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

31. Έστω  $D$  το χωρίο της Άσκησης 11. Σχηματίστε τα τριπλά ολοκληρώματα σε σφαιρικές συντεταγμένες τα οποία δίνουν τον όγκο του  $D$ , χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σειρές ολοκλήρωσης.

(α)  $d\rho \, d\phi \, d\theta$

(β)  $d\phi \, d\rho \, d\theta$

32. Έστω  $D$  το χωρίο που είναι κάτω φραγμένο από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και άνω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 1$ . Σχηματίστε τα τριπλά ολοκληρώματα σε σφαιρικές συντεταγμένες τα οποία δίνουν τον όγκο του  $D$ , χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σειρές ολοκλήρωσης.

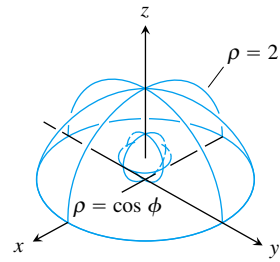
(α)  $d\rho \, d\phi \, d\theta$

(β)  $d\phi \, d\rho \, d\theta$

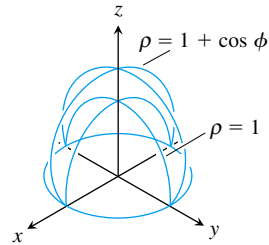
## Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Στις Ασκήσεις 33-38, (α) βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος όγκου του στερεού που δίνεται, και κατόπιν (β) υπολογίστε το ολοκλήρωμα αυτό.

33. Το στερεό που περικλείεται από τη σφαίρα  $\rho = \cos \phi$  και το ημισφαίριο  $\rho = 2, z \geq 0$ .



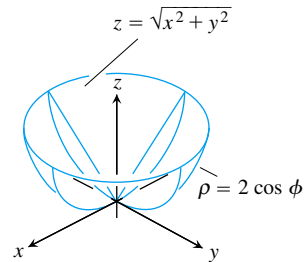
34. Το στερεό που είναι κάτω φραγμένο από το ημισφαίριο  $\rho = 1, z \geq 0$ , και άνω φραγμένο από το καρδιοειδές εκ περιστροφής  $\rho = 1 + \cos \phi$ .



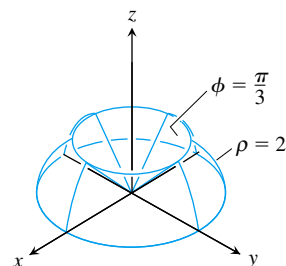
35. Το στερεό που περικλείεται από το καρδιοειδές εκ περιστροφής  $\rho = 1 - \cos \phi$ .

36. Το άνω τμήμα που αποκόπτεται από το στερεό της Άσκησης 35 το επίπεδο  $xy$ .

37. Το στερεό που είναι κάτω φραγμένο από τη σφαίρα  $\rho = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  και άνω φραγμένο από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



38. Το στερεό που είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $xy$ , πλευρικά φραγμένο από τη σφαίρα  $\rho = 2$ , και άνω φραγμένο από τον κώνο  $\phi = \pi/3$ .



## Καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

39. Σχηματίστε τριπλά ολοκληρώματα για τον όγκο της σφαίρας  $\rho = 2$  σε (α) σφαιρικές, (β) κυλινδρικές, και (γ) καρτεσιανές συντεταγμένες.

40. Έστω  $D$  η περιοχή του πρώτου οκταμορίου που είναι κάτω φραγμένη από τον κώνο  $\phi = \pi/4$  και άνω φραγμένη από τη σφαίρα  $\rho = 3$ . Εκφράστε τον όγκο της πε-

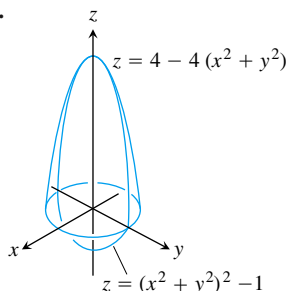
ριοχής  $D$  ως τριπλό ολοκλήρωμα σε (α) κυλινδρικές και (β) σφαιρικές συντεταγμένες. Κατόπιν (γ) βρείτε τον όγκο  $V$ .

41. Έστω  $D$  το μικρότερο τμήμα που αποκόπτεται από μια στερεά σφαίρα ακτίνας 2 μονάδων μήκους ένα επίπεδο που απέχει 1 μονάδα μήκους από το κέντρο της σφαίρας. Εκφράστε τον όγκο του χωρίου  $D$  ως τριπλό ολοκλήρωμα σε (α) σφαιρικές, (β) κυλινδρικές, και (γ) καρτεσιανές συντεταγμένες. Έπειτα, (δ) βρείτε τον όγκο υπολογίζοντας ένα από τα ολοκληρώματα αυτά.
42. Εκφράστε τη ροπή αδρανείας  $I_z$  του στερεού ημισφαίριου  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ , ως ολοκλήρωμα σε (α) κυλινδρικές και (β) σφαιρικές συντεταγμένες. Εν συνεχεία (γ) βρείτε το  $I_z$ .

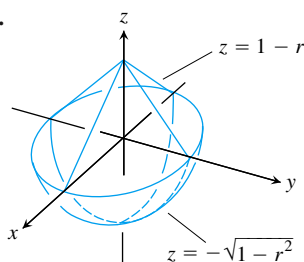
### Όγκοι

Βρείτε τους όγκους των στερεών των Ασκήσεων 43-48.

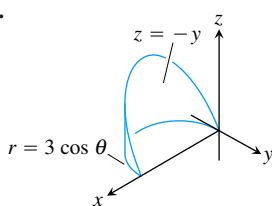
43.



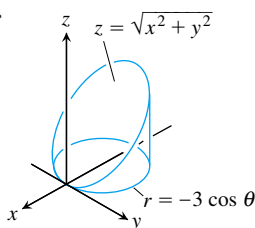
44.



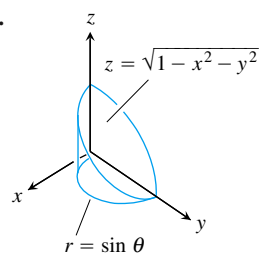
45.



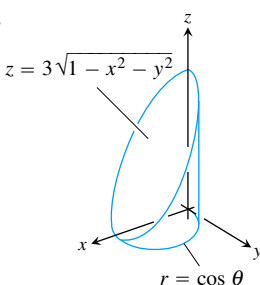
46.



47.



48.



49. **Σφαίρα και κώνοι** Βρείτε τον όγκο του τμήματος της στερεάς σφαίρας  $\rho \leq a$  το οποίο κείται μεταξύ των κώνων  $\phi = \pi/3$  και  $\phi = 2\pi/3$ .

50. **Σφαίρα και ημιεπίπεδα** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που αποκόπτεται από τη στερεά σφαίρα  $\rho \leq a$  τα ημιεπίπεδα  $\theta = 0$  και  $\theta = \pi/6$  στο πρώτο οκταμόριο.

51. **Σφαίρα και επίπεδο** Βρείτε τον όγκο του μικρότερου τμήματος που αποκόπτεται από τη στερεά σφαίρα  $\rho \leq 2$  το επίπεδο  $z = 1$ .

52. **Κώνος και επίπεδο** Βρείτε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και κείται μεταξύ των επιπέδων  $z = 1$  και  $z = 2$ .

53. **Κύλινδρος και παραβολοειδές** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$ , πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$ , και άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ .

54. **Κύλινδρος και παραβολοειδή** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι κάτω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ , πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$ , και άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2 + 1$ .

55. **Κύλινδρος και κώνοι** Βρείτε τον όγκο του στερεού που αποκόπτεται από τον κυλινδρικό σωλήνα (με τοιχώματα πεπερασμένου πάχους)  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  οι κώνοι  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ .

56. **Σφαίρα και κύλινδρος** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που κείται στο εσωτερικό της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  και στο εξωτερικό του κυλίνδρου  $x^2 + y^2 = 1$ .

57. **Κύλινδρος και επίπεδα** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$  και από τα επίπεδα  $z = 0$  και  $y + z = 4$ .

58. **Κύλινδρος και επίπεδα** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$  και από τα επίπεδα  $z = 0$  και  $x + y + z = 4$ .

59. **Χωρίο που περικλείεται από δύο παραβολοειδή** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 5 - x^2 - y^2$  και κάτω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 4x^2 + 4y^2$ .

60. **Παραβολοειδές και κύλινδρος** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 9 - x^2 - y^2$ , κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $xy$ , και κείται εξωτερικά του κυλίνδρου  $x^2 + y^2 = 1$ .

61. **Κύλινδρος και σφαίρα** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που αποκόπτεται από τον στερεό κύλινδρο  $x^2 + y^2 \leq 1$  η σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

62. **Σφαίρα και παραβολοειδές** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι άνω φραγμένο από τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  και κάτω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ .

### Μέσες τιμές

63. Βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησεως  $f(r, \theta, z) = r$  στο χωρίο που φράσσεται από τον κύλινδρο  $r = 1$  και τα επίπεδα  $z = -1$  και  $z = 1$ .

64. Βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησεως  $f(r, \theta, z) = r$  στη στερεά σφαίρα που φράσσεται από τη σφαιρική επιφάνεια  $r^2 + z^2 = 1$ . (Πρόκειται για τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .)

65. Βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησεως  $f(\rho, \phi, \theta) = \rho$  στη στερεά σφαίρα  $\rho \leq 1$ .

66. Βρείτε τη μέση τιμή της συναρτήσεως  $f(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos \phi$  στο άνω ήμισυ της στερεάς σφαίρας  $\rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi/2$ .

### Μάζες, ροπές και κεντροειδή

67. **Κέντρο μάζας** Ένα στερεό σταθερής πυκνότητας είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$ , άνω φραγμένο από τον κώνο  $z = r, r \geq 0$ , και πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $r = 1$ . Βρείτε το κέντρο μάζας του.
68. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές του χωρίου στο πρώτο οκταμόριο το οποίο είναι άνω φραγμένο από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$ , και πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$  και από τα επίπεδα  $x = 0$  και  $y = 0$ .
69. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές του στερεού της Άσκησης 38.
70. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές του στερεού που είναι άνω φραγμένο από τη σφαίρα  $\rho = a$  και κάτω φραγμένο από τον κώνο  $\phi = \pi/4$ .
71. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές του στερεού που είναι άνω φραγμένο από την επιφάνεια  $z = \sqrt{r}$ , πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $r = 4$ , και κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $xy$ .
72. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές του χωρίου που αποκόπτονται από τη στερεά σφαίρα  $r^2 + z^2 \leq 1$  τα ημιεπίπεδα  $\theta = -\pi/3, r \geq 0$ , και  $\theta = \pi/3, r \geq 0$ .
73. **Ροπή και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα περιστροφής ως προς τον άξονα  $z$  ενός ορθού κυκλικού κυλινδρικού σωλήνα με τοιχώματα πεπερασμένου πάχους. Ο σωλήνας φράσσεται εσωτερικά από τον κύλινδρο  $r = 1$ , εξωτερικά από τον κύλινδρο  $r = 2$ , και άνω και κάτω από τα επίπεδα  $z = 4$  και  $z = 0$ . (Θεωρήστε  $\delta = 1$ .)
74. **Ροπές αδρανείας στερεού κυκλικού κυλίνδρου** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ενός στερεού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας 1 και ύψους 2 (α) ως προς τον άξονα του κυλίνδρου και (β) ως προς ευθεία που διέρχεται από το κεντροειδές κάθετα στον άξονα του κυλίνδρου. (Θεωρήστε  $\delta = 1$ .)
75. **Ροπή αδρανείας στερεού κώνου** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ενός ορθού κυκλικού κώνου με ακτίνα βάσης 1 και ύψος 1, ως προς άξονα που διέρχεται από την κορυφή και είναι παράλληλος στη βάση του κώνου. (Θεωρήστε  $\delta = 1$ .)
76. **Ροπή αδρανείας στερεάς σφαίρας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας μιας στερεάς σφαίρας ακτίνας  $a$  ως προς μια διάμετρό της. (Θεωρήστε  $\delta = 1$ .)
77. **Ροπή αδρανείας στερεού κώνου** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ενός ορθού κυκλικού κώνου ακτίνας βάσης  $a$  και ύψους  $h$ , ως προς τον άξονά του. (Υπόδειξη: Τοποθετήστε τον κώνο έτσι ώστε η κορυφή του να βρίσκεται στην αρχή και ο άξονάς του να είναι ο άξονας  $z$ .)
78. **Μεταβαλλόμενη πυκνότητα** Ένα στερεό είναι άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = r^2$ , κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 0$ , και πλευρικά φραγμένο από τον κύλινδρο  $r = 1$ . Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$  αν η πυκνότητά του είναι
- (α)  $\delta(r, \theta, z) = z$

(β)  $\delta(r, \theta, z) = r$ .

79. **Μεταβαλλόμενη πυκνότητα** Ένα στερεό είναι κάτω φραγμένο από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και άνω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 1$ . Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$ , αν η πυκνότητά του είναι
- (α)  $\delta(r, \theta, z) = z$
- (β)  $\delta(r, \theta, z) = z^2$ .
80. **Μεταβαλλόμενη πυκνότητα** Μια στερεά σφαίρα φράσσεται από την επιφάνεια  $\rho = a$ . Βρείτε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$  αν η πυκνότητά της είναι
- (α)  $\delta(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$
- (β)  $\delta(\rho, \phi, \theta) = r = \rho \sin \phi$ .
81. **Κεντροειδές στερεού ημιελλειψοειδούς** Δείξτε ότι το κεντροειδές του στερεού ημιελλειψοειδούς εκ περιστροφής  $(r^2/a^2) + (z^2/h^2) \leq 1, z \geq 0$ , κείται στον άξονα  $z$  σε σημείο που απέχει από την αρχή τρία όγδοα της απόστασης βάσης-κορυφής. Η ειδική περίπτωση  $h = a$  αντιστοιχεί σε στερεό ημισφαίριο. Έτσι, το κεντροειδές ενός στερεού ημισφαίριου κείται στον άξονα συμμετρίας, και απέχει από την αρχή τρία όγδοα της απόστασης βάσης-κορυφής.
82. **Κεντροειδές στερεού κώνου** Δείξτε ότι το κεντροειδές ενός στερεού ορθού κυκλικού κώνου απέχει από την αρχή ένα τέταρτο της απόστασης βάσης-κορυφής. (Εν γένει, το κεντροειδές στερεού κώνου ή πυραμίδας απέχει από την αρχή ένα τέταρτο της απόστασης βάσης-κορυφής.)
83. **Μεταβαλλόμενη πυκνότητα** Ένας στερεός ορθός κυκλικός κύλινδρος φράσσεται από τον κύλινδρο  $r = a$  και από τα επίπεδα  $z = 0$  και  $z = h, h > 0$ . Βρείτε το κέντρο μάζας, τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$ , αν η πυκνότητά του στερεού κυλίνδρου είναι  $\delta(r, \theta, z) = z + 1$ .
84. **Μάζα ατμόσφαιρας πλανήτη** Ένας σφαιρικός πλανήτης ακτίνας  $R$  έχει ατμόσφαιρα πυκνότητας  $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ , όπου  $h$  είναι το ύψος από την πλανητική επιφάνεια,  $\mu_0$  είναι η πυκνότητα στο επίπεδο της θάλασσας, και  $c$  είναι μια θετική σταθερά. Βρείτε τη μάζα της ατμόσφαιρας του πλανήτη.
85. **Πυκνότητα στο κέντρο πλανήτη** Ένας πλανήτης έχει σφαιρικό σχήμα ακτίνας  $R$  και ολική μάζα  $M$  με σφαιρικά συμμετρική κατανομή πυκνότητας η οποία αυξάνεται γραμμικά όσο πλησιάζουμε στο κέντρο του. Πόση είναι η πυκνότητα στο κέντρο του πλανήτη αν θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα στην επιφάνεια είναι μηδέν;
- Θεωρία και παραδείγματα**
86. **Κατακόρυφοι κυκλικοί κύλινδροι σε σφαιρικές συντεταγμένες** Βρείτε μια εξίσωση της μορφής  $\rho = f(\theta)$  για τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = a^2$ .
87. **Κατακόρυφα επίπεδα σε κυλινδρικές συντεταγμένες**
- (α) Δείξτε ότι επίπεδα κάθετα στον άξονα  $x$  έχουν εξισώσεις της μορφής  $r = a \sec \theta$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

- (β) Δείξτε ότι επίπεδα κάθετα στον άξονα  $y$  έχουν εξισώσεις της μορφής  $r = b \csc \theta$ .
88. (Συνέχεια της Άσκησης 87) Βρείτε μια εξίσωση της μορφής  $r = f(\theta)$  (δηλ. σε κυλινδρικές συντεταγμένες) για το επίπεδο  $ax + by = c$ ,  $c \neq 0$ .
89. **Μάθετε γράφοντας: Συμμετρία** Τι είδους συμμετρία θα βρούμε σε μια επιφάνεια που έχει εξίσωση της μορφής  $r = f(z)$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
90. **Μάθετε γράφοντας: Συμμετρία** Τι είδους συμμετρία θα βρούμε σε μια επιφάνεια που έχει εξίσωση της μορφής  $\rho = f(\phi)$  σε σφαιρικές συντεταγμένες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## 12.7

## Αντικαταστάσεις σε πολλαπλά ολοκληρώματα

Αντικαταστάσεις σε διπλά ολοκληρώματα • Αντικαταστάσεις σε τριπλά ολοκληρώματα

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίζουμε πολλαπλά ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Όπως και στην απλή ολοκλήρωση, σκοπός της μεθόδου είναι η αντικατάσταση περίπλοκων ολοκληρωμάτων με άλλα που είναι εύκολο να υπολογιστούν. Και αυτό επιτυγχάνεται με απλοποίηση της ολοκληρωτέας ποσότητας, των ορίων ολοκλήρωσης, ή και των δύο.

## Αντικαταστάσεις σε διπλά ολοκληρώματα

Η μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες που είδαμε στην Ενότητα 12.3 αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης μεθόδου αντικατάστασης για διπλά ολοκληρώματα, μιας μεθόδου που θεωρεί τις αλλαγές μεταβλητών ως μετασχηματισμούς χωρίων.

Έστω ότι ένα χωρίο  $G$  του επιπέδου  $uv$  μετασχηματίζεται ένα προς ένα σε χωρίο  $R$  του επιπέδου  $xy$  μέσω εξισώσεων της μορφής

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$

όπως δείχνει το Σχήμα 12.52. Καλούμε το χωρίο  $R$  **είδωλο** του  $G$  για τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό, ενώ το χωρίο  $G$  καλείται **προείδωλο** του  $R$ . Κάθε συνάρτηση  $f(x, y)$  ορισμένη στο  $R$  μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση  $f(g(u, v), h(u, v))$  ορισμένη και στο  $G$ . Πώς σχετίζεται το ολοκλήρωμα της  $f(x, y)$  στο χωρίο  $R$  με το ολοκλήρωμα της  $f(g(u, v), h(u, v))$  στο χωρίο  $G$ ;

Η απάντηση είναι η εξής: Αν οι  $g$ ,  $h$ , και  $f$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και η ποσότητα  $J(u, v)$  (που θα ορίσουμε αμέσως) μηδενίζεται μόνο σε μεμονωμένα σημεία (ή πουθενά), τότε

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv. \quad (1)$$

Ο παράγοντας  $J(u, v)$ , του οποίου η απόλυτη τιμή εμφανίζεται στην Εξίσωση (1), ονομάζεται **Ιακωβιανή** του μετασχηματισμού συντεταγμένων, προς τιμήν του Γερμανού μαθηματικού Carl Jacobi.

## «Αντίστροφη» μετάβαση

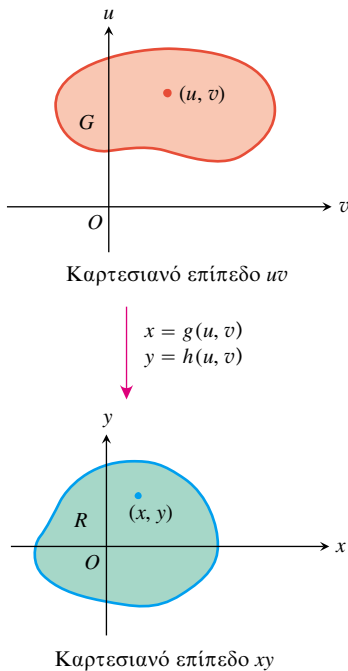
Οι εξισώσεις μετασχηματισμού  $x = g(u, v)$  και  $y = h(u, v)$  «μεταβαίνουν» από το  $G$  στο  $R$ , αλλά εδώ τις χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε ένα ολοκλήρωμα ορισμένο στο χωρίο  $R$  σε ολοκλήρωμα ορισμένο στο χωρίο  $G$ .

Ορισμός **Ιακωβιανή**

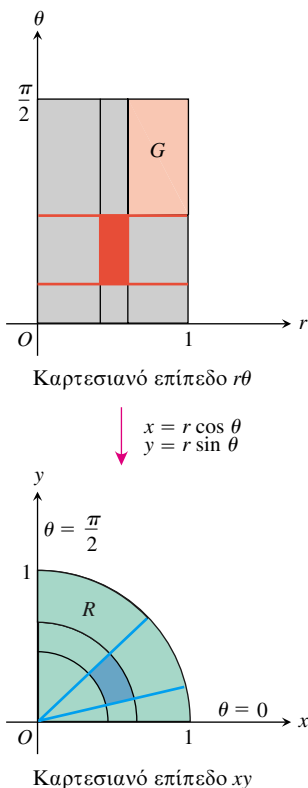
Η **Ιακωβιανή ορίζουσα** ή, απλούστερα, **Ιακωβιανή** του μετασχηματισμού συντεταγμένων  $x = g(u, v)$ ,  $y = h(u, v)$  είναι

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}. \quad (2)$$





**ΣΧΗΜΑ 12.52** Οι εξισώσεις  $x = g(u, v)$  και  $y = h(u, v)$  μας επιτρέπουν να μετατρέπουμε ένα ολοκλήρωμα ορισμένο σε χωρίο  $R$  του επιπέδου  $xy$  σε ολοκλήρωμα ορισμένο σε χωρίο  $G$  του επιπέδου  $uv$ .



**ΣΧΗΜΑ 12.53** Οι εξισώσεις  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  μετασχηματίζουν το χωρίο  $G$  στο χωρίο  $R$ .

Η Ιακωβιανή γράφεται επίσης ως

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

συμβολισμός που μας βοηθάει να θυμηθούμε πώς σχηματίζεται η ορίζουσα της Εξίσωσης (2) από τις μερικές παραγώγους των  $x$  και  $y$ . Η απόδειξη της Εξίσωσης (1) είναι περίπλοκη και αποτελεί αντικείμενο του προχωρημένου απειροστικού λογισμού. Για τον λόγο αυτό δεν την παραθέτουμε εδώ.

Αν χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες, έχουμε  $r$  και  $\theta$  στη θέση των  $u$  και  $v$ . Θέτοντας  $x = r \cos \theta$  και  $y = r \sin \theta$ , η Ιακωβιανή παίρνει τη μορφή

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Συνεπώς, η Εξίσωση (1) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta \\ &= \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta, \text{ για } r \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

που δεν είναι παρά η Εξίσωση (4) της Ενότητας 12.3.

Το Σχήμα 12.53 δείχνει πώς οι εξισώσεις  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  μετασχηματίζουν το ορθογώνιο χωρίο  $G$ :  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  στο τεταρτοκύκλιο  $R$  που φράσσεται από την  $x^2 + y^2 = 1$  στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$ .

Προσέξτε ότι το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της Εξίσωσης (3) δεν είναι το ολοκλήρωμα της  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  σε χωρίο του πολικού επιπέδου. Είναι το ολοκλήρωμα του γινομένου  $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  επί  $r$  σε χωρίο  $G$  του καρτεσιανού επιπέδου  $r\theta$ .

Ακολουθεί άλλο ένα παράδειγμα μετασχηματισμού.

### Παράδειγμα 1 Εφαρμογή μετασχηματισμού σε ολοκλήρωμα

Υπολογίστε το

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$$

εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \quad (4)$$

και ολοκληρώνοντας στο κατάλληλο χωρίο του επιπέδου  $uv$ .

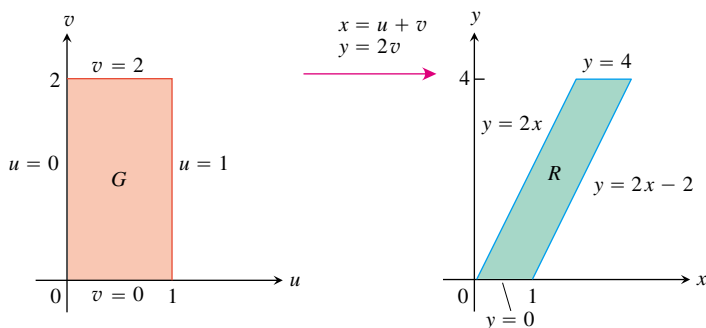
**Λύση** Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης  $R$  στο επίπεδο  $xy$  και σημειώνουμε τα σύνορά του (Σχήμα 12.54).

Για να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (1), χρειαζόμαστε το αντίστοιχο χωρίο  $G$  του επιπέδου  $uv$ , καθώς και την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Για να τα βρούμε, επιλύουμε πρώτα τις Εξισώσεις (4) για τα  $x$  και  $y$  συναρτήσει των  $u$  και  $v$ . Παίρνουμε λοιπόν

$$x = u + v \quad y = 2v. \quad (5)$$

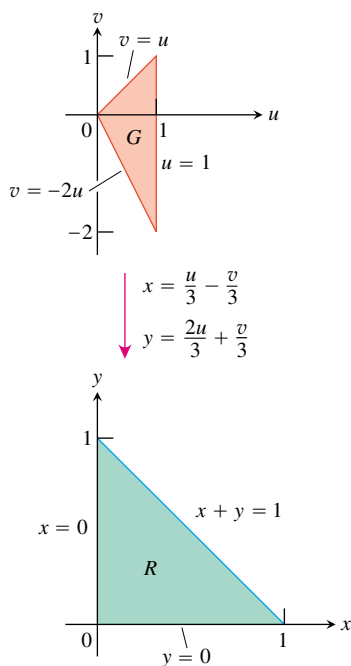


Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σύνορα του  $G$  αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στις εξισώσεις των συνόρων του  $R$  (Σχήμα 12.54).



**ΣΧΗΜΑ 12.54** Οι εξισώσεις  $x = u + v$  και  $y = 2v$  μετασχηματίζουν το χωρίο  $G$  στο χωρίο  $R$ . Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό με τις εξισώσεις  $u = (2x - y)/2$  και  $v = y/2$  μετασχηματίζουμε το χωρίο  $R$  στο χωρίο  $G$ . Δείτε το Παράδειγμα 1.

| Εξισώσεις $xy$ του<br>συνόρου του $R$ | Αντίστοιχες εξισώσεις $uv$<br>του συνόρου του $G$ | Απλοποιημένες<br>εξισώσεις $uv$ |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------|
| $x = y/2$                             | $u + v = 2v/2 = v$                                | $u = 0$                         |
| $x = (y/2) + 1$                       | $u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$                      | $u = 1$                         |
| $y = 0$                               | $2v = 0$                                          | $v = 0$                         |
| $y = 4$                               | $2v = 4$                                          | $v = 2$                         |



**ΣΧΗΜΑ 12.55** Οι εξισώσεις  $x = (u/3) - (v/3)$  και  $y = (2u/3) + (v/3)$  μετασχηματίζουν το χωρίο  $G$  στο χωρίο  $R$ . Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό με τις εξισώσεις  $u = x + y$  και  $v = y - 2x$  μετασχηματίζουμε το  $R$  στο  $G$ . Δείτε το Παράδειγμα 2.

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού (από τις Εξισώσεις (5) και πάλι) είναι

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (1):

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u |J(u, v)| du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2) du dv = \int_0^2 [u^2]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2. \end{aligned}$$

## Παράδειγμα 2 Εφαρμογή μετασχηματισμού σε ολοκλήρωμα

Υπολογίστε το

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx.$$

**Λύση** Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης  $R$  στο επίπεδο  $xy$  και σημειώνουμε τα σύνορά του (Σχήμα 12.55). Η μορφή της ολοκληρωτέας ποσότητας μας υποδεικνύει τον μετασχηματισμό  $u = x + y$  και  $v = y - 2x$ . Μετά από λίγη άλγεβρα παίρνουμε τα  $x$  και  $y$  συναρτήσεις των  $u$  και  $v$ :

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}. \quad (6)$$

Από τις Εξισώσεις (6), μπορούμε να βρούμε τα σύνορα του χωρίου  $G$  του επιπέδου  $uv$  (Σχήμα 12.55).

| Εξισώσεις $xy$ του<br>συνόρου του $R$ | Αντίστοιχες εξισώσεις $uv$<br>του συνόρου του $G$                                      | Απλοποιημένες<br>εξισώσεις $uv$ |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $x + y = 1$                           | $\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$ | $u = 1$                         |
| $x = 0$                               | $\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$                                                        | $v = u$                         |
| $y = 0$                               | $\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$                                                       | $v = -2u$                       |

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των Εξισώσεων (6) είναι

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Με εφαρμογή της Εξίσωσης (1), υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx &= \int_{u=0}^1 \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 |J(u, v)| dv du \\ &= \int_0^1 \int_{-2u}^u u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv du = \frac{1}{3} \int_0^1 u^{1/2} \left[\frac{1}{3} v^3\right]_{v=-2u}^{v=u} du \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2} (u^3 + 8u^3) du = \int_0^1 u^{7/2} du = \left[\frac{2}{9} u^{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

### Αντικαταστάσεις σε τριπλά ολοκληρώματα

Οι αντικαταστάσεις σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες που είδαμε στην Ενότητα 12.6 αποτελούν ειδικές περιπτώσεις μιας μεθόδου αντικατάστασης στην οποία οι αλλαγές συντεταγμένων σε τριπλά ολοκληρώματα αντιμετωπίζονται ως μετασχηματισμοί τριδιάστατων χωρίων του χώρου. Η μέθοδος αυτή είναι η ίδια που χρησιμοποιήσαμε για διπλά ολοκληρώματα, μόνο που τώρα έχουμε να κάνουμε με μία επιπλέον, τρίτη, διάσταση.

Έστω ότι ένα χωρίο  $G$  του χώρου  $uvw$  μετασχηματίζεται ένα προς ένα σε χωρίο  $D$  του χώρου  $xyz$  μέσω διαφορίσιμων εξισώσεων της μορφής

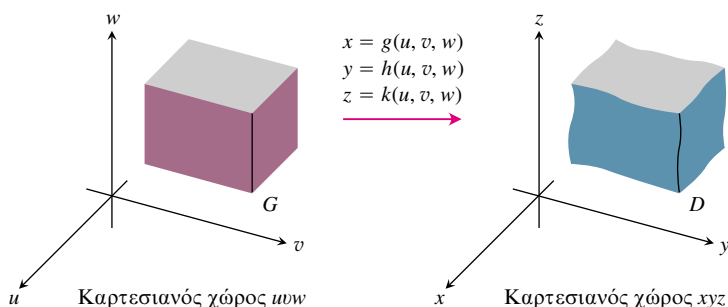
$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w),$$

όπως δείχνει το Σχήμα 12.56. Στην περίπτωση αυτή κάθε συνάρτηση  $F(x, y, z)$  ορισμένη στο  $D$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση

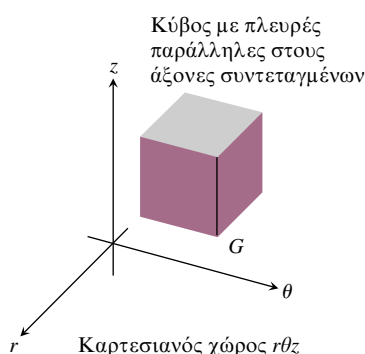
$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

ορισμένη στο  $G$ . Αν οι  $g$ ,  $h$ , και  $k$  έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους, τότε το ολοκλήρωμα της  $F(x, y, z)$  στο  $D$  συνδέεται με το ολοκλήρωμα της  $H(u, v, w)$  στο  $G$  μέσω της εξίσωσης

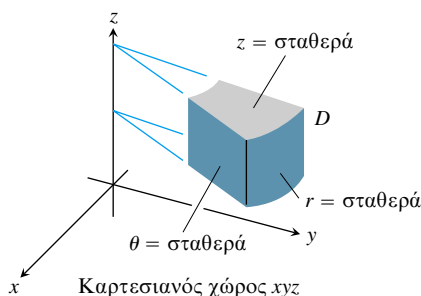
$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G H(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (7)$$



**ΣΧΗΜΑ 12.56** Οι εξισώσεις  $x = g(u, v, w)$ ,  $y = h(u, v, w)$ , και  $z = k(u, v, w)$  μας επιτρέπουν να μετατρέπουμε ένα ολοκλήρωμα ορισμένο σε χωρίο  $D$  του καρτεσιανού χώρου  $xyz$ , σε ολοκλήρωμα ορισμένο σε χωρίο  $G$  του καρτεσιανού χώρου  $uvw$ .



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$



**ΣΧΗΜΑ 12.57** Οι εξισώσεις  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , και  $z = z$  μετασχηματίζουν το χωρίο  $G$  στο χωρίο  $D$ .

Ο παράγοντας  $J(u, v, w)$ , του οποίου η απόλυτη τιμή εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση, είναι η **Ιακωβιανή ορίζουσα**

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}. \quad (8)$$

Η απόδειξη του τύπου αλλαγής μεταβλητών της Εξίσωσης (7) είναι περίπλοκη και θα την παραλείψουμε (όπως κάναμε και για τη διδιάστατη περίπτωση).

Αν θέλουμε να μετασχηματίσουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες, τα  $r$ ,  $\theta$ , και  $z$  παίρνουν τη θέση των  $u$ ,  $v$ , και  $w$ . Ο μετασχηματισμός από τον καρτεσιανό χώρο  $r\theta z$  στον καρτεσιανό χώρο  $xyz$  δίνεται από τις εξισώσεις

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

(Σχήμα 12.57). Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι

$$\begin{aligned} J(r, \theta, z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r. \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη εκδοχή της Εξίσωσης (7) είναι

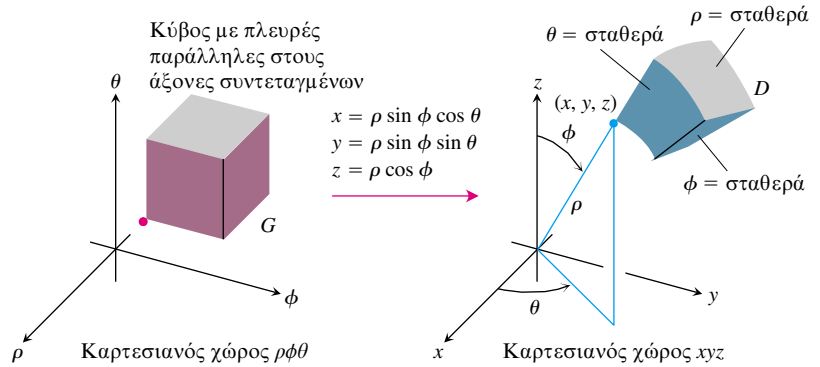
$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G H(r, \theta, z) |r| dr d\theta dz. \quad (9)$$

Για  $r \geq 0$  μπορούμε να παραλείψουμε το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Αν θέλουμε να μετασχηματίσουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες, τα  $\rho$ ,  $\phi$ , και  $\theta$  παίρνουν τη θέση των  $u$ ,  $v$ , και  $w$ . Ο μετασχηματισμός από τον καρτεσιανό χώρο  $\rho\phi\theta$  στον καρτεσιανό χώρο  $xyz$  δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

(Σχήμα 12.58). Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι



**ΣΧΗΜΑ 12.58** Οι εξισώσεις  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ , και  $z = \rho \cos \phi$  μετασχηματίζουν το χωρίο  $G$  στο χωρίο  $D$ .

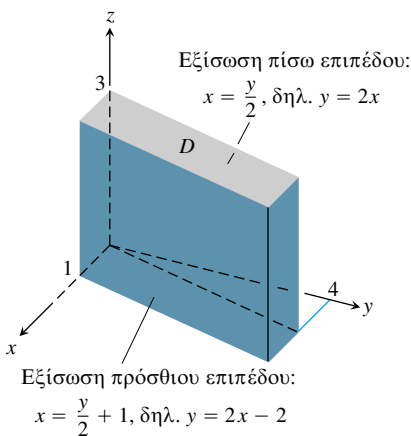
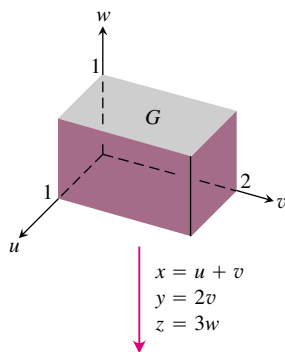
$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi \quad (10)$$

(Άσκηση 17). Η αντίστοιχη εκδοχή της Εξίσωσης (7) είναι

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G H(\rho, \phi, \theta) |\rho^2 \sin \phi| d\rho d\phi d\theta. \quad (11)$$

Μπορούμε να παραλείψουμε το σύμβολο της απόλυτης τιμής, εφόσον το  $\sin \phi$  δεν είναι ποτέ αρνητικό.

Ακολουθεί άλλο ένα παράδειγμα αντικατάστασης. Το ακόλουθο ολοκλήρωμα υπολογίζεται και απευθείας, αλλά για διδακτικούς λόγους θα εφαρμόσουμε εδώ τη μέθοδο αντικατάστασης για τον υπολογισμό του.



**ΣΧΗΜΑ 12.59** Οι εξισώσεις  $x = u + v$ ,  $y = 2v$ , και  $z = 3w$  μετασχηματίζουν το χωρίο  $G$  στο χωρίο  $D$ . Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό μέσω των εξισώσεων  $u = (2x - y)/2$ ,  $v = y/2$ , και  $w = z/3$  μετασχηματίζουμε το  $D$  στο  $G$ . Δείτε το Παράδειγμα 3.

### Παράδειγμα 3 Εφαρμογή μετασχηματισμού σε ολοκλήρωση

Υπολογίστε το

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz$$

εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$u = (2x - y)/2, \quad v = y/2, \quad w = z/3 \quad (12)$$

και ολοκληρώνοντας στο κατάλληλο χωρίο του χώρου  $uvw$ .

**Λύση** Σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης  $D$  στον χώρο  $xyz$  και σημειώνουμε τα σύνορά του (Σχήμα 12.59). Στην περίπτωση αυτή, οι συνοριακές επιφάνειες είναι επίπεδα.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (7), χρειαζόμαστε το αντίστοιχο χωρίο  $G$  του χώρου  $uvw$  και την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Για να τις βρούμε, επιλύουμε πρώτα τις Εξισώσεις (12) ως προς  $x$ ,  $y$ , και  $z$  συναρτήσεις των  $u$ ,  $v$ , και  $w$ . Παίρνουμε

$$x = u + v, \quad y = 2v, \quad z = 3w. \quad (13)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σύνορα του  $G$  αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στις εξισώσεις των συνόρων του χωρίου  $D$ :

| Εξισώσεις $xyz$ του<br>συνόρου του $D$ | Αντίστοιχες εξισώσεις $uvw$<br>του συνόρου του $G$ | Απλοποιημένες<br>εξισώσεις $uvw$ |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------|
| $x = y/2$                              | $u + v = 2v/2 = v$                                 | $u = 0$                          |
| $x = (y/2) + 1$                        | $u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$                       | $u = 1$                          |
| $y = 0$                                | $2v = 0$                                           | $v = 0$                          |
| $y = 4$                                | $2v = 4$                                           | $v = 2$                          |
| $z = 0$                                | $3w = 0$                                           | $w = 0$                          |
| $z = 3$                                | $3w = 3$                                           | $w = 1$                          |

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, βάσει των Εξισώσεων (13), είναι

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (7):

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w) |J(u, v, w)| du dv dw \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)(6) du dv dw = 6 \int_0^1 \int_0^2 \left[ \frac{u^2}{2} + uw \right]_0^1 dv dw \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^2 \left( \frac{1}{2} + w \right) dv dw = 6 \int_0^1 \left[ \frac{v}{2} + vw \right]_0^2 dw = 6 \int_0^1 (1+2w) dw \\ &= 6 \left[ w + w^2 \right]_0^1 = 6(2) = 12. \end{aligned}$$

### CD-ROM

#### Δικτυότοπος

##### Βιογραφικά στοιχεία

Carl Gustav  
Jacob Jacobi  
(1804-1851)

Το θεώρημα αντικατάστασης, εφαρμόζόμενο σε πολλαπλά ολοκληρώματα, μπορεί να οδηγήσει σε υπολογιστικές περιπλοκές, όταν ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι μη γραμμικός. Η παρούσα ενότητα αποσκοπούσε απλώς στο να εισαγάγει τις κεντρικές έννοιες. Σε προχωρημένα μαθήματα απειροστικού λογισμού, και αφού θα έχετε ήδη διδαχθεί γραμμική άλγεβρα, μπορείτε να αναζητήσετε μια διεξοδικότερη ανάλυση των μετασχηματισμών, της Ιακωβιανής, και της αντικατάστασης με πολλές μεταβλητές.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12.7

### Εύρεση Ιακωβιανών δύο μεταβλητών και μετασχηματισμοί χωρίων

1. (α) Επιλύστε το σύστημα

$$u = x - y, \quad v = 2x + y$$

ως προς  $x$  και  $y$  συναρτήσει των  $u$  και  $v$ . Στη συνέχεια βρείτε την τιμή της Ιακωβιανής  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ .

- (β) Βρείτε σε τι μετασχηματίζεται το τριγωνικό χωρίο του επιπέδου  $xy$  που έχει κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ , και  $(1, -2)$ , αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό  $u = x - y$ ,  $v = 2x + y$ . Σχεδιάστε το μετασχηματισμένο χωρίο στο επίπεδο  $uv$ .

2. (α) Επιλύστε το σύστημα

$$u = x + 2y, \quad v = x - y$$

ως προς  $x$  και  $y$  συναρτήσει των  $u$  και  $v$ . Στη συνέχεια

χεια βρείτε την τιμή της Ιακωβιανής  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ .

- (β) Βρείτε σε τι μετασχηματίζεται το τριγωνικό χωρίο του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τις ευθείες  $y = 0$ ,  $y = x$ , και  $x + 2y = 2$ , αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό  $u = x + 2y$ ,  $v = x - y$ . Σχεδιάστε το μετασχηματισμένο χωρίο στο επίπεδο  $uv$ .

3. (α) Επιλύστε το σύστημα

$$u = 3x + 2y, \quad v = x + 4y$$

ως προς  $x$  και  $y$  συναρτήσει των  $u$  και  $v$ . Στη συνέχεια βρείτε την τιμή της Ιακωβιανής  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ .

- (β) Βρείτε σε τι μετασχηματίζεται το τριγωνικό χωρίο του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από τον άξονα  $x$ , τον άξονα  $y$ , και την ευθεία  $x + y = 1$ , αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό  $u = 3x + 2y$ ,  $v = x + 4y$ . Σχεδιάστε το μετασχηματισμένο χωρίο στο επίπεδο  $uv$ .

4. (α) Επιλύστε το σύστημα

$$u = 2x - 3y, \quad v = -x + y$$

ως προς  $x$  και  $y$  συναρτήσει των  $u$  και  $v$ . Στη συνέχεια βρείτε την τιμή της Ιακωβιανής  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ .

- (β) Βρείτε σε τι μετασχηματίζεται το παραλληλόγραμμο χωρίο του επιπέδου  $xy$  που έχει σύνορα τις ευθείες  $x = -3$ ,  $x = 0$ ,  $y = x$ , και  $y = x + 1$ , αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό  $u = 2x - 3y$ ,  $v = -x + y$ . Σχεδιάστε το μετασχηματισμένο χωρίο στο επίπεδο  $uv$ .

## Εφαρμογή μετασχηματισμών για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$$

από το Παράδειγμα 1 με απευθείας ολοκλήρωση ως προς  $x$  και  $y$ , και επαληθεύστε ότι η τιμή του ισούται με 2.

6. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό της Άσκησης 1 για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2) dx dy$$

όπου το χωρίο  $R$  στο πρώτο τεταρτημόριο φράσσεται από τις ευθείες  $y = -2x + 4$ ,  $y = -2x + 7$ ,  $y = x - 2$ , και  $y = x + 1$ .

7. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό της Άσκησης 3 για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2) dx dy$$

όπου το χωρίο  $R$  στο πρώτο τεταρτημόριο φράσσεται από τις ευθείες  $y = -(3/2)x + 1$ ,  $y = -(3/2)x + 3$ ,  $y = -(1/4)x$ , και  $y = -(1/4)x + 1$ .

8. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό και το παραλληλόγραμμο  $R$  της Άσκησης 4 για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iint_R 2(x-y) dx dy.$$

9. Έστω  $R$  το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$ , το οποίο φράσσεται από τις υπερβολές  $xy = 1$ ,  $xy = 9$ , και από τις ευθείες  $y = x$ ,  $y = 4x$ . Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό  $x = u/v$ ,  $y = uv$  για  $u > 0$  και  $v > 0$  προκειμένου να γράψετε το

$$\iint_R \left( \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

ως ολοκλήρωμα ορισμένο σε χωρίο  $G$  του επιπέδου  $uv$ . Στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα αυτό στο χωρίο  $G$ .

10. (α) Βρείτε την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού  $x = u$ ,  $y = uv$ , και σχεδιάστε το χωρίο  $G$ :  $1 \leq u \leq 2$ ,  $1 \leq uv \leq 2$  του επιπέδου  $uv$ .

- (β) Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε την Εξίσωση (1) προκειμένου να μετασχηματίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx$$

σε ολοκλήρωμα ορισμένο σε χωρίο  $G$ . Υπολογίστε και τα δύο ολοκληρώματα.

11. **Ροπή αδρανείας ελλειπτικής πλάκας** Μια λεπτή πλάκα σταθερής πυκνότητας καλύπτει το χωρίο που φράσσεται από την έλλειψη  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , στο επίπεδο  $xy$ . Βρείτε τη ροπή αδρανείας της πλάκας ως προς την αρχή. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό  $x = ar \cos \theta$ ,  $y = br \sin \theta$ .)

12. **Εύρεση εμβαδού ελλείψεως** Το εμβαδόν  $\pi ab$  της έλλειψης  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  μπορεί να βρεθεί αν ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση  $f(x, y) = 1$  στο χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη στο επίπεδο  $xy$ . Ο απευθείας υπολογισμός του ολοκληρώματος απαιτεί τριγωνομετρική αντικατάσταση. Ένας ευκολότερος τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό  $x = au$ ,  $y = bv$  και να υπολογίσουμε το μετασχηματισμένο ολοκλήρωμα στο χωρίο του κυκλικού δίσκου  $G$ :  $u^2 + v^2 \leq 1$  του επιπέδου  $uv$ . Βρείτε το εμβαδόν με τον τρόπο αυτόν.

13. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό της Άσκησης 2 για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{(y-x)} dx dy$$

γράφοντάς το πρώτα ως ολοκλήρωμα σε χωρίο  $G$  του επιπέδου  $uv$ .

14. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό  $x = u + (1/2)v$ ,  $y = v$  για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2} dx dy$$



γράφοντάς το πρώτα ως ολοκλήρωμα σε χωρίο  $G$  του επιπέδου  $uw$ .

## Εύρεση Ιακωβιανών

15. Βρείτε την Ιακωβιανή  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$  του μετασχηματισμού

(α)  $x = u \cos v, \quad y = u \sin v$

(β)  $x = u \sin v, \quad y = u \cos v.$

16. Βρείτε την Ιακωβιανή  $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$  του μετασχηματισμού

(α)  $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = w$

(β)  $x = 2u - 1, \quad y = 3v - 4, \quad z = (1/2)(w - 4).$

17. Υπολογίστε την ορίζουσα της Εξίσωσης (10) προκειμένου να δείξετε ότι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από τον καρτεσιανό χώρο  $\rho\phi\theta$  στον καρτεσιανό χώρο  $xyz$  είναι  $\rho^2 \sin \phi$ .

18. **Αντικαταστάσεις σε απλά ολοκληρώματα** Πώς μπορούν οι αντικαταστάσεις που κάνουμε σε απλά ολοκληρώματα να θεωρηθούν ως μετασχηματισμοί περιοχών; Ποια είναι η Ιακωβιανή σε τέτοιες περιπτώσεις; Δείξτε τι συμβαίνει με ένα παράδειγμα.

## Εφαρμογή μετασχηματισμών για τον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων

19. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του Παραδείγματος 3 ολοκληρώνοντας ως προς  $x, y$ , και  $z$ .
20. **Όγκος ελλειψοειδούς** Βρείτε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(Υπόδειξη: Θέστε  $x = au, y = bv$ , και  $z = cw$ . Στη συνέχεια βρείτε τον όγκο του κατάλληλου χωρίου στον χώρο  $uvw$ .)

21. Υπολογίστε το

$$\iiint |xyz| \, dx \, dy \, dz$$

στο χωρίο που καλύπτει το στερεό ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

(Υπόδειξη: Θέστε  $x = au, y = bv$ , και  $z = cw$ . Στη συνέχεια ολοκληρώστε στο κατάλληλο χωρίο του χώρου  $uvw$ .)

22. Έστω  $D$  χωρίο του χώρου  $xyz$  που ορίζεται από τις ανισότητες

$$1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq xy \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Υπολογίστε το

$$\iiint_D (x^2 y + 3xyz) \, dx \, dy \, dz$$

εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$u = x, \quad v = xy, \quad w = 3z$$

και ολοκληρώνοντας στο κατάλληλο χωρίο  $G$  του χώρου  $uvw$ .

23. **Κεντροειδές στερεού ημιελλειψοειδούς** Θεωρήστε ως δεδομένο ότι το κεντροειδές ενός στερεού ημισφαιρίου κείται στον άξονα συμμετρίας και απέχει από τη βάση τρία όγδοα της απόστασης βάσης-κορυφής. Στη συνέχεια δείξτε, μετασχηματίζοντας τα κατάλληλα ολοκληρώματα, ότι το κέντρο μάζας του στερεού ημιελλειψοειδούς  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1, z \geq 0$ , ανήκει στον άξονα  $z$  και απέχει από τη βάση τρία όγδοα της απόστασης βάσης-κορυφής. (Μπορείτε να το δείξετε αυτό χωρίς να υπολογίσετε κανένα ολοκλήρωμα.)

24. **Κυλινδρική κελύφη** Στην Ενότητα 5.2, είδαμε πώς να βρίσκουμε τον όγκο στερεού εκ περιστροφής με τη μέθοδο των φλοιών· συγκεκριμένα, αν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $y = f(x)$  και τον άξονα  $x$  από  $a$  έως  $b$  ( $0 < a < b$ ) περιστραφεί ως προς τον άξονα  $y$ , ο όγκος του στερεού που προκύπτει είναι  $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$ . Δείξτε ότι ο υπολογισμός όγκων μέσω τριπλών ολοκληρωμάτων δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες, με το  $z$  στη θέση του  $y$ .)

## Επαναληπτικές ερωτήσεις

- Ορίστε το διπλό ολοκλήρωμα συναρτήσεως δύο μεταβλητών σε φραγμένο χωρίο του επιπέδου συντεταγμένων.
- Πώς υπολογίζουμε διπλά ολοκληρώματα με διαδοχική ολοκλήρωση; Έχει σημασία η σειρά ολοκλήρωσης; Πώς καθορίζονται τα όρια ολοκλήρωσης; Δώστε παραδείγματα.
- Πώς χρησιμοποιούμε διπλά ολοκληρώματα για τον υπολογισμό εμβαδών, μέσων τιμών, μαζών, ροπών, κέντρων μάζας, και ακτίνων αδρανείας; Δώστε παραδείγματα.
- Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα διπλό ολοκλήρω-

μα σε καρτεσιανές συντεταγμένες, σε ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες; Για ποιον λόγο θα άξιζε τον κόπο η μετατροπή αυτή; Δώστε ένα παράδειγμα.

- Ορίστε το τριπλό ολοκλήρωμα συνάρτησης  $f(x, y, z)$  σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου.
- Πώς υπολογίζουμε τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες; Πώς προκύπτουν τα όρια ολοκλήρωσης; Δώστε ένα παράδειγμα.
- Πώς χρησιμοποιούμε τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες για τον υπολογισμό όγκων, μέσων τιμών, ροπών, κέντρων μάζας, και ακτίνων περιστροφής; Δώστε παραδείγματα.

8. Πώς ορίζονται τα τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες; Ποιον λόγο έχουμε να προτιμήσουμε τις συντεταγμένες αυτές σε σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες;
9. Πώς υπολογίζονται τα τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες; Πώς βρίσκονται τα όρια ολοκλήρωσης; Δώστε παραδείγματα.
10. Πώς μπορούν οι αντικαταστάσεις μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα να θεωρηθούν ως μετασχηματισμοί διδιάστατων χωρίων; Δώστε έναν υποδειγματικό υπολογισμό.
11. Πώς μπορούν οι αντικαταστάσεις μεταβλητών σε τριπλά ολοκληρώματα να θεωρηθούν ως μετασχηματισμοί τριδιάστατων χωρίων; Δώστε έναν υποδειγματικό υπολογισμό.

## Ασκήσεις κεφαλαίου

### Επίεδα χωρία ολοκλήρωσης

Στις Ασκήσεις 1-4, σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα.

1.  $\int_1^{10} \int_0^{1/y} ye^{xy} dx dy$
2.  $\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx$
3.  $\int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t ds dt$
4.  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy dx dy$

### Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

Στις Ασκήσεις 5-8, σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και γράψτε ένα ισοδύναμο ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη. Στη συνέχεια υπολογίστε και τα δύο ολοκληρώματα.

5.  $\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy$
6.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{x} dy dx$
7.  $\int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y dx dy$
8.  $\int_0^2 \int_0^{4-x} 2x dy dx$

### Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 9-12.

9.  $\int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) dx dy$
10.  $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$
11.  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy dx}{y^4 + 1}$
12.  $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi \sin \pi x^2}{x^2} dx dy$

### Εμβαδά και όγκοι

13. **Εμβαδόν μεταξύ ευθείας και παραβολής** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία  $y = 2x + 4$  και από την παραβολή  $y = 4 - x^2$  στο επίπεδο  $xy$ .
14. **Εμβαδόν χωρίου που φράσσεται από ευθείες και από παραβολή** Βρείτε το εμβαδόν του «τριγωνικού» χωρίου του επιπέδου  $xy$ , το οποίο φράσσεται από δεξιά από την παραβολή  $y = x^2$ , από αριστερά από την ευθεία  $x + y = 2$ , και από πάνω από την ευθεία  $y = 4$ .
15. **Όγκος χωρίου κάτω από παραβολοειδές** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που κείται κάτω από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$  και πάνω από το τρίγωνο που περικλείεται από τις ευθείες  $y = x$ ,  $x = 0$ , και  $x + y = 2$ , στο επίπεδο  $xy$ .
16. **Όγκος χωρίου κάτω από παραβολικό κύλινδρο** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που κείται κάτω από τον παραβολικό κύλινδρο  $z = x^2$  και πάνω από το χωρίο που περικλείουν η παραβολή  $y = 6 - x^2$  και η ευθεία  $y = x$  του επιπέδου  $xy$ .

### Μέσες τιμές

Βρείτε τη μέση τιμή της  $f(x, y) = xy$  στα χωρία των Ασκήσεων 17 και 18.

17. Το τετράγωνο που φράσσεται από τις ευθείες  $x = 1$ ,  $y = 1$  στο πρώτο τεταρτημόριο.
18. Το τεταρτοκύκλιο  $x^2 + y^2 \leq 1$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

### Μάζες και ροπές

19. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές της «τριγωνικής» περιοχής που φράσσεται από τις ευθείες  $x = 2$ ,  $y = 2$  και από την υπερβολή  $xy = 2$  στο επίπεδο  $xy$ .
20. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής που περικλείεται από την παραβολή  $x + y^2 - 2y = 0$  και από την ευθεία  $x + 2y = 0$  στο επίπεδο  $xy$ .
21. **Ροπή αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς την αρχή των αξόνων, μιας λεπτής τριγωνικής πλάκας σταθερής πυκνότητας  $\delta = 3$ , η οποία φράσσεται από τον άξονα  $y$  και από τις ευθείες  $y = 2x$  και  $y = 4$  του επιπέδου  $xy$ .
22. **Ροπή αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο ενός λεπτού ορθογώνιου στρώματος σταθερής πυκνότητας  $\delta = 1$  το οποίο φράσσεται από τις ευθείες  
(α)  $x = \pm 2$ ,  $y = \pm 1$  στο επίπεδο  $xy$   
(β)  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  στο επίπεδο  $xy$ .  
(Υπόδειξη: Βρείτε το  $I_x$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τον τύπο του  $I_x$  προκειμένου να βρείτε το  $I_y$  και προσθέστε τα  $I_x$  και  $I_y$  αυτά για να βρείτε το  $I_0$ .)
23. **Ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$ , μιας λεπτής τριγωνικής πλάκας σταθερής πυκνότητας  $\delta$ , η οποία έχει κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ , και  $(3, 2)$  στο επίπεδο  $xy$ .
24. **Πλάκα με μεταβαλλόμενη πυκνότητα** Βρείτε το κέντρο μάζας, τις ροπές αδρανείας, και τις ακτίνες αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων, μιας λεπτής πλάκας

που φράσσεται από την ευθεία  $y = x$  και από την παραβολή  $y = x^2$  στο επίπεδο  $xy$ , και έχει πυκνότητα  $\delta(x, y) = x + 1$ .

25. **Πλάκα με μεταβαλλόμενη πυκνότητα** Βρείτε τη μάζα και τις ροπές αδρανείας ως προς τους άξονες συντεταγμένων μιας λεπτής τετράγωνης πλάκας η οποία φράσσεται από τις ευθείες  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  στο επίπεδο  $xy$ , και έχει πυκνότητα  $\delta(x, y) = x^2 + y^2 + 1/3$ .
26. **Τρίγωνο με την ίδια ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας και την ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$  μιας λεπτής τριγωνικής πλάκας σταθερής πυκνότητας  $\delta$ , της οποίας η βάση καλύπτει το διάστημα  $[0, b]$  του άξονα  $x$ , και η κορυφή ανήκει στην ευθεία  $y = h$  κατακόρυφα πάνω από τον άξονα  $x$ . Όπως θα δείτε, δεν έχει σημασία σε ποιο σημείο επί της ευθείας αυτής κείται η κορυφή της τριγωνικής πλάκας. Όλες οι τριγωνικές πλάκες τέτοιου είδους θα έχουν την ίδια ροπή αδρανείας και ακτίνα αδρανείας ως προς τον άξονα  $x$ .

### Πολικές συντεταγμένες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 27 και 28 μεταβαίνοντας σε πολικές συντεταγμένες.

$$27. \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2 \, dy \, dx}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$28. \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy$$

29. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής του πολικού επιπέδου η οποία ορίζεται από τις ανισότητες  $0 \leq r \leq 3$ ,  $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ .
30. **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής του πρώτου τεταρτημορίου η οποία φράσσεται από τις πολικές ευθείες  $\theta = 0$  και  $\theta = \pi/2$  και από τους κύκλους  $r = 1$  και  $r = 3$ .
31. (α) **Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής του πολικού επιπέδου η οποία κείται στο εσωτερικό της καρδιοειδούς  $r = 1 + \cos \theta$  και στο εξωτερικό του κύκλου  $r = 1$ .
- (β) Σχεδιάστε την περιοχή αυτή και σημειώστε το κεντροειδές στο σχήμα σας.
32. (α) **Μάθετε γράφοντας: Κεντροειδές** Βρείτε το κεντροειδές της περιοχής του επιπέδου που ορίζουν οι πολικές ανισότητες  $0 \leq r \leq a$ ,  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$  ( $0 < \alpha \leq \pi$ ). Πώς μετατοπίζεται το κεντροειδές αυτό καθώς  $\alpha \rightarrow \pi^-$ ;
- (β) Σχεδιάστε την περιοχή για  $\alpha = 5\pi/6$  και σημειώστε το κεντροειδές στο σχήμα σας.
33. **Ολοκλήρωση επί λημνίσκου** Ολοκληρώστε τη συνάρτηση  $f(x, y) = 1/(1+x^2+y^2)^2$  στην περιοχή που περικλείεται από τον ένα βρόχο του λημνίσκου  $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$ .
34. Ολοκληρώστε την  $f(x, y) = 1/(1+x^2+y^2)^2$  στις εξής περιοχές:
- (α) **Τριγωνική περιοχή** Το τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, \sqrt{3})$
- (β) **Πρώτο τεταρτημόριο** Το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$ .

### Τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των Ασκήσεων 35-38.

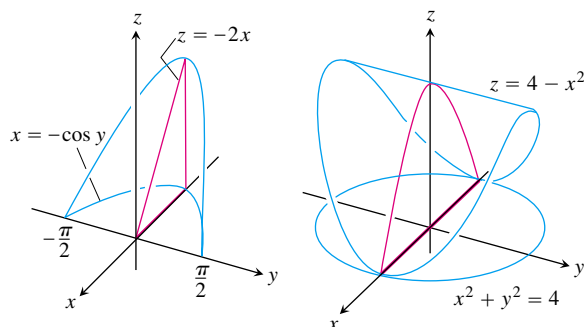
$$35. \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y+z) \, dx \, dy \, dz$$

$$36. \int_{\ln 6}^{\ln 7} \int_0^{\ln 2} \int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)} \, dz \, dy \, dx$$

$$37. \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x-y-z) \, dz \, dy \, dx$$

$$38. \int_1^e \int_1^x \int_0^z \frac{2y}{z^3} \, dy \, dz \, dx$$

39. **Όγκος** Βρείτε τον όγκο της σφηνοειδούς περιοχής που φράσσεται πλευρικά από τον κύλινδρο  $x = -\cos y$ ,  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , από πάνω από το επίπεδο  $z = -2x$ , και από κάτω από το επίπεδο  $xy$ .



40. **Όγκος** Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από πάνω από τον κύλινδρο  $z = 4 - x^2$ , πλευρικά από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 4$ , και από κάτω από το επίπεδο  $xy$ .
41. **Μέση τιμή** Βρείτε τη μέση τιμή της  $f(x, y, z) = 30xz\sqrt{x^2+y^2}$  στο ορθογώνιο στερεό του πρώτου οκταμορίου που φράσσεται από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων, και από τα επίπεδα  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 1$ .
42. **Μέση τιμή** Βρείτε τη μέση τιμή του  $\rho$  στη στερεά σφαίρα  $\rho \leq a$  (σφαιρικές συντεταγμένες).

### Κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

43. **Από κυλινδρικές σε ορθογώνιες συντεταγμένες** Εκφράστε το

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3 \, dz \, r \, dr \, d\theta, \quad r \geq 0$$

σε (α) ορθογώνιες συντεταγμένες με σειρά ολοκλήρωσης  $dz \, dx \, dy$  και (β) σε σφαιρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια (γ) υπολογίστε ένα από τα ολοκληρώματα αυτά.

44. **Από καρτεσιανές σε κυλινδρικές συντεταγμένες (α)** Εκφράστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια (β) υπολογίστε το νέο αυτό ολοκλήρωμα.

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2 \, dz \, dy \, dx$$

45. **Από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες (α)** Εκφράστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια (β) υπολογίστε αυτό το νέο ολοκλήρωμα.

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \, dy \, dx$$

46. **Καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες** Γράψτε το τριπλό ολοκλήρωμα της  $f(x, y, z) = 6 + 4y$  στην περιοχή του πρώτου οκτημορίου η οποία φράσσεται από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , από τον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$ , και από τα επίπεδα που ανά δύο ορίζουν οι άξονες συντεταγμένων σε (α) καρτεσιανές συντεταγμένες, (β) κυλινδρικές συντεταγμένες, και (γ) σφαιρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια (δ) βρείτε το ολοκλήρωμα της  $f$  υπολογίζοντας ένα από τα τριπλά ολοκληρώματα.

47. **Από κυλινδρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες** Σχηματίστε ένα ολοκλήρωμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες το οποίο να ισοδυναμεί με το

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3 (\sin \theta \cos \theta) z^2 \, dz \, dr \, d\theta.$$

Διευθετήστε το ολοκλήρωμά σας έτσι ώστε η σειρά ολοκλήρωσης να είναι πρώτα ως προς  $z$ , έπειτα ως προς  $y$ , και τέλος ως προς  $x$ .

48. **Από καρτεσιανές σε κυλινδρικές συντεταγμένες** Ο όγκος ενός στερεού είναι

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx.$$

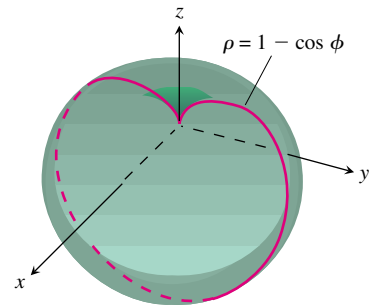
- (α) Περιγράψτε το στερεό δίνοντας τις εξισώσεις των συννοσηκών επιφανειών του.  
(β) Εκφράστε το ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες, αλλά μην το υπολογίσετε.
49. **Σφαιρικές συντεταγμένες έναντι κυλινδρικών** Τριπλά ολοκληρώματα που αφορούν σφαιρικά σχήματα δεν απαιτούν

πάντα σφαιρικές συντεταγμένες για τον ευχερή υπολογισμό τους. Μερικές φορές ο υπολογισμός γίνεται ευκολότερα σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι άνω φραγμένο από τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  και κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $z = 2$ , χρησιμοποιώντας (α) κυλινδρικές συντεταγμένες και (β) σφαιρικές συντεταγμένες.

50. **Εύρεση του  $I_z$  σε σφαιρικές συντεταγμένες** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$  του στερεού σταθερής πυκνότητας  $\delta = 1$  που είναι άνω φραγμένο από τη σφαίρα  $\rho = 2$  και κάτω φραγμένο από τον κώνο  $\phi = \pi/3$  (οι συντεταγμένες είναι σφαιρικές).

51. **Ροπή αδρανείας σφαιρικού φλοιού πεπερασμένου πάχους** Ένα στερεό έχει σταθερή πυκνότητα  $\delta$  και φράσσεται από δύο ομόκεντρες σφαίρες ακτίνων  $a$  και  $b$  ( $a < b$ ). Βρείτε τη ροπή αδρανείας του στερεού ως προς μια διάμετρό του.

52. **Ροπή αδρανείας ενός μήλου** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $z$  ενός στερεού πυκνότητας  $\delta = 1$  που περικλείεται από την επιφάνεια (σε σφαιρικές συντεταγμένες)  $\rho = 1 - \cos \phi$ .



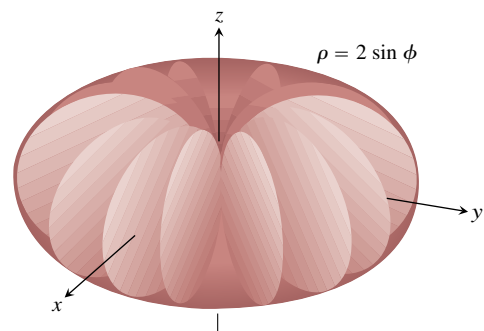
## Επιπρόσθετες ασκήσεις: Θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

### Όγκοι

- Αμμόλοφος: διπλά και τριπλά ολοκληρώματα** Η βάση ενός αμμόλοφου καλύπτει την περιοχή του επιπέδου  $xy$  που φράσσεται από την παραβολή  $x^2 + y = 6$  και από την ευθεία  $y = x$ . Το ύψος του αμμόλοφου πάνω από το σημείο  $(x, y)$  είναι  $x^2$ . Εκφράστε τον όγκο του αμμόλοφου ως (α) διπλό ολοκλήρωμα, (β) τριπλό ολοκλήρωμα. Στη συνέχεια (γ) υπολογίστε τον όγκο αυτό.
- Νερό σε ημισφαιρικό δοχείο** Ένα ημισφαιρικό δοχείο ακτίνας 5 cm περιέχει νερό μέχρι 3 cm από το άνω χείλος του. Βρείτε τον όγκο του νερού στο δοχείο.
- Στερεή κυλινδρική περιοχή μεταξύ δύο επιπέδων** Βρείτε τον όγκο του τμήματος του στερεού κυλίνδρου  $x^2 + y^2 \leq 1$  που κείται μεταξύ των επιπέδων  $z = 0$  και  $x + y + z = 2$ .
- Σφαίρα και παραβολοειδές** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι άνω φραγμένο από τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  και κάτω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = x^2 + y^2$ .

- Δύο παραβολοειδή** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που είναι άνω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 3 - x^2 - y^2$  και κάτω φραγμένο από το παραβολοειδές  $z = 2x^2 + 2y^2$ .

- Σφαιρικές συντεταγμένες** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται από την επιφάνεια (σε σφαιρικές συντεταγμένες)  $\rho = 2 \sin \phi$  (δείτε το ακόλουθο σχήμα).





7. **Οπή σε σφαίρα** Σε στερεά σφαίρα ανοίγουμε διαμπερώς μια κυκλική κυλινδρική οπή, ο άξονας της οποίας είναι μια διάμετρος της σφαίρας. Ο όγκος του στερεού που απομένει είναι

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

- (α) Βρείτε την ακτίνα της οπής και την ακτίνα της σφαίρας.  
 (β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.
8. **Σφαίρα και κύλινδρος** Βρείτε τον όγκο του υλικού που αποκόπτεται από τη στερεά σφαίρα  $r^2 + z^2 \leq 9$  ο κύλινδρος  $r = 3 \sin \theta$ .
9. **Δύο παραβολοειδή** Βρείτε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται από τις επιφάνειες  $z = x^2 + y^2$  και  $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$ .
10. **Κύλινδρος και επιφάνεια  $z = xy$**  Βρείτε τον όγκο του χωρίου του πρώτου οκταμήτριου που κείται μεταξύ των κυλινδρών  $r = 1$  και  $r = 2$  και είναι κάτω φραγμένο από το επίπεδο  $xy$  και άνω φραγμένο από την επιφάνεια  $z = xy$ .

### Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη σχέση

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

για να σχηματίσετε ένα διπλό ολοκλήρωμα το οποίο και υπολογίστε αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.)

12. (α) **Πολικές συντεταγμένες** Δείξτε, μεταβαίνοντας σε πολικές συντεταγμένες, ότι

$$\int_0^{a \sin \beta} \int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \ln(x^2 + y^2) dx dy = a^2 \beta \left( \ln a - \frac{1}{2} \right),$$

όπου  $a > 0$  και  $0 < \beta < \pi/2$ .

- (β) Ξαναγράψτε το καρτεσιανό ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη.
13. **Αναγωγή διπλού ολοκληρώματος σε απλό** Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης προκειμένου να δείξετε ότι το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να αναχθεί σε απλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^x \int_0^u e^{m(x-t)} f(t) dt du = \int_0^x (x-t) e^{m(x-t)} f(t) dt.$$

Ομοίως, μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\int_0^x \int_0^v \int_0^u e^{m(x-t)} f(t) dt du dv = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t) dt.$$

14. **Μετασχηματισμός διπλού ολοκληρώματος προκειμένου να πάρουμε σταθερά όρια ολοκλήρωσης** Μερικές φορές ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα με μεταβλητά όρια μπορεί να αναχθεί σε απλό ολοκλήρωμα με σταθερά όρια. Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης, προκειμένου να δείξετε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \left( \int_0^x g(x-y) f(y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 f(y) \left( \int_y^1 g(x-y) f(x) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 g(|x-y|) f(x) f(y) dx dy. \end{aligned}$$

### Μάζες και ροπές

15. **Ελαχιστοποίηση ροπής αδρανείας** Μια λεπτή πλάκα σταθερής πυκνότητας καταλαμβάνει την τριγωνική περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$  η οποία έχει κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ , και  $(a, 1/a)$ . Για ποια τιμή του  $a$  θα ελαχιστοποιηθεί η ροπή αδρανείας της πλάκας ως προς την αρχή;
16. **Ροπή αδρανείας μιας τριγωνικής πλάκας** Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς την αρχή μιας λεπτής τριγωνικής πλάκας σταθερής πυκνότητας  $\delta = 3$ , η οποία φράσσεται από τον άξονα  $y$  και από τις ευθείες  $y = 2x$  και  $y = 4$  στο επίπεδο  $xy$ .
17. **Μάζα και ροπή αδρανείας αντίβαρου** Το αντίβαρο μιας φτερωτής σταθερής πυκνότητας 1 έχει το σχήμα του μικρότερου τμήματος που αποκόπτεται από κυκλικό δίσκο ακτίνας  $a$  μια χορδή η οποία απέχει  $b$  από το κέντρο του ( $b < a$ ). Βρείτε τη μάζα του αντίβαρου και τη ροπή αδρανείας του ως προς το κέντρο του τροχού της φτερωτής.
18. **Κεντροειδές ενός μπουμερανγκ** Βρείτε το κεντροειδές ενός χωρίου σχήματος μπουμερανγκ που κείται μεταξύ των παραβολών  $y^2 = -4(x-1)$  και  $y^2 = -2(x-2)$  στο επίπεδο  $xy$ .

### Θεωρία και εφαρμογές

19. Υπολογίστε το

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max(b^2x^2, a^2y^2)} dy dx,$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι θετικοί ακέραιοι και

$$\max(b^2x^2, a^2y^2) = \begin{cases} b^2x^2 & \text{αν } b^2x^2 \geq a^2y^2 \\ a^2y^2 & \text{αν } b^2x^2 < a^2y^2. \end{cases}$$

20. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\iint \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy$$

που ορίζεται στο ορθογώνιο χωρίο  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $y_0 \leq y \leq y_1$ , ισούται με

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1) - F(x_1, y_0) + F(x_0, y_0).$$

21. Έστω ότι η  $f(x, y)$  μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο  $f(x, y) = F(x)G(y)$  μιας συνάρτησης του  $x$  επί μια συνάρτηση του  $y$ . Στην περίπτωση αυτή, το ολοκλήρωμα της  $f$  στο ορθογώνιο χωρίο  $R: a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο

$$\iint_R f(x, y) dA = \left( \int_a^b F(x) dx \right) \left( \int_c^d G(y) dy \right). \quad (1)$$

Η σχετική επιχειρηματολογία έχει ως εξής:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_a^b F(x)G(y) dx \right) dy \quad (i)$$

$$= \int_c^d \left( G(y) \int_a^b F(x) dx \right) dy \quad (ii)$$

$$= \int_c^d \left( \int_a^b F(x) dx \right) G(y) dy \quad (iii)$$

$$= \left( \int_a^b F(x) dx \right) \int_c^d G(y) dy. \quad (iv)$$

- (α) **Μάθετε γράφοντας** Αιτιολογήστε τα βήματα i έως και iv.

Στις περιπτώσεις όπου βρίσκει εφαρμογή, η Εξίσωση (1) διευκολύνει τους υπολογισμούς μας. Εφαρμόστε την για τον υπολογισμό των ακόλουθων ολοκληρωμάτων.

(β)  $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\pi/2} e^x \cos y dy dx$

(γ)  $\int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{x}{y^2} dx dy$

22. Έστω  $D_u f$  η παράγωγος της  $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$ .

(α) **Εύρεση μέσης τιμής** Βρείτε τη μέση τιμή της  $D_u f$  στο τριγωνικό χωρίο που αποκόπτεται από το πρώτο τεταρτημόριο η ευθεία  $x + y = 1$ .

(β) **Μέση τιμή και κεντροειδές** Δείξτε ότι εν γένει η μέση τιμή της  $D_u f$  σε ένα χωρίο του επιπέδου  $xy$  είναι η τιμή της  $D_u f$  στο κεντροειδές του χωρίου.

23. **Η τιμή του  $\Gamma(1/2)$**  Η συνάρτηση γάμμα,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

επεκτείνει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης παραγωγικού από μη αρνητικούς ακεραίους στους πραγματικούς αριθμούς. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων έχει ο αριθμός

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt. \quad (2)$$

- (α) Αν δεν έχετε ήδη λύσει την Άσκηση 37 της Ενότητας 12.3, λύστε την τώρα για να δείξετε ότι

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- (β) Αντικαταστήστε  $y = \sqrt{t}$  στην Εξίσωση (2) για να δείξετε ότι  $\Gamma(1/2) = 2I = \sqrt{\pi}$ .

24. **Ολικό ηλεκτρικό φορτίο σε κυκλική πλάκα** Η κατανομή ηλε-

κτρικού φορτίου σε μια κυκλική πλάκα ακτίνας  $R$  (σε m) είναι  $\sigma(r, \theta) = kr(1 - \sin \theta)$  coulomb/m<sup>2</sup> ( $k$  είναι μια σταθερά). Ολοκληρώστε τη  $\sigma$  σε όλη την έκταση της πλάκας για να βρείτε το ολικό φορτίο  $Q$ .

25. **Παραβολικός μετρητής βροχοπτώσεως** Ένα δοχείο έχει το σχήμα της γραφικής παράστασης της  $z = x^2 + y^2$  από  $z = 0$  έως  $z = 10$  cm. Επιθυμείτε να βαθμονομήσετε το δοχείο ώστε να το χρησιμοποιήσετε ως βροχομετρητή. Πόσο θα είναι το ύψος του νερού στο δοχείο που θα αντιστοιχεί σε βροχόπτωση 1 cm; Το ίδιο ερώτημα για βροχόπτωση 3 cm.

26. **Νερό σε δορυφορικό «πιάτο»** Ένα παραβολικό δορυφορικό «πιάτο» έχει πλάτος 2 m και βάθος 1/2 m. Ο άξονας συμμετρίας του έχει κλίση 30° σε σχέση με την κατακόρυφο.

(α) Σχηματίστε, χωρίς να υπολογίσετε, ένα τριπλό ολοκλήρωμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες, που να δίνει τον όγκο του νερού που μπορεί να συγκρατήσει το δορυφορικό «πιάτο». (Υπόδειξη: Τοποθετήστε το σύστημα συντεταγμένων σας έτσι ώστε το «πιάτο» να είναι στην «όρθια θέση» και το επίπεδο του περιεχόμενου νερού να είναι κεκλιμένο.) (Προσοχή: Το δύσκολο σημείο της άσκησης έγκειται στα όρια ολοκλήρωσης.)

(β) Ποια είναι η ελάχιστη κλίση που πρέπει να δώσουμε στο «πιάτο» ώστε να μην συγκρατεί καθόλου νερό;

27. **Άπειρος ημικύλινδρος** Έστω  $D$  το εσωτερικό ενός άπειρου ορθού κυκλικού ημικυλίνδρου ακτίνας 1 του οποίου η μοναδική βάση απέχει 1 μονάδα μήκους πάνω από την αρχή. Άξονας του ημικυλίνδρου είναι η ημιευθεία που ξεκινά από το  $(0, 0, 1)$  και προεκτείνεται στο άπειρο. Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε το

$$\iiint_D z(r^2 + z^2)^{-5/2} dV.$$

28. **Υπερόγκος** Όπως έχουμε ήδη μάθει,  $\int_a^b 1 dx$  είναι το μήκος του διαστήματος  $[a, b]$  στην ευθεία των αριθμών (μονοδιάστατος χώρος),  $\iint_R 1 dA$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $R$  του επιπέδου  $xy$  (διδιάστατος χώρος), και  $\iiint_D 1 dV$  είναι ο όγκος του χωρίου  $D$  του τριδιάστατου χώρου (χώρος  $xyz$ ). Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο: Αν  $Q$  είναι ένα χωρίο του τετραδιάστατου χώρου (χώρος  $xyzw$ ), τότε το  $\iiint_Q 1 dV$  είναι ο «υπερόγκος» του  $Q$ . Χρησιμοποιήστε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον τετραδιάστατο χώρο προκειμένου να βρείτε τον υπερόγκο του χωρίου που καλύπτει το εσωτερικό της μοναδιαίας τετραδιάστατης σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ .