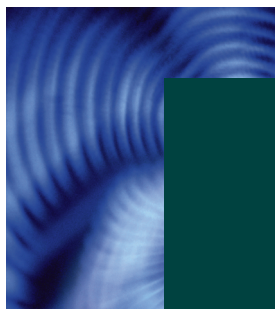


R.L. Finney • M.D. Weir • F.R. Giordano

THOMAS Απειροστικός λογισμός

Απόδοση στα ελληνικά – Επιστημονική επιμέλεια
Μανώλης Αντωνογιαννάκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ



ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Βασισμένο στο πρωτότυπο του
George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Αναθεωρημένο από τους
Ross L. Finney
Maurice D. Weir

Naval Postgraduate School

και
Frank R. Giordano

Απόδοση στα ελληνικά – επιστημονική επιμέλεια
Μανώλης Αντωνογιαννάκης



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
Ιδρυτική δωρεά Παγκρητικής Ενώσεως Αμερικής
ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ηράκλειο Κρήτης, Τ.Θ. 1527, 71110. Τηλ.: 2810 391097, Fax: 2810 391085

Αθήνα: Κλεισόβης 3, 10677. Τηλ.: 210 3849020-22, Fax: 210 3301583

e-mail: info@cup.gr

www.cup.gr

ΣΕΙΡΑ: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ: ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΤΡΑΧΑΝΑΣ

Τίτλος πρωτοτύπου: Thomas' *Calculus*, Tenth Edition

© 2001 by Addison Wesley Longman

© 2001, για την ελληνική γλώσσα: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Πρώτη έκδοση σε δύο τόμους: Μάιος 2004

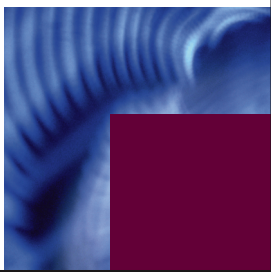
Πρώτη έκδοση σε ενιαίο τόμο: Μάιος 2012

Απόδοση στα ελληνικά & επιστημονική επιμέλεια: Μανώλης Αντωνογιαννάκης, Ph.D.

Τελικός έλεγχος μετάφρασης: Κανάρης Τσίγκανος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Στοιχειοθεσία – σελιδοποίηση: Παρασκευή Βλάχου (Π.Ε.Κ.)

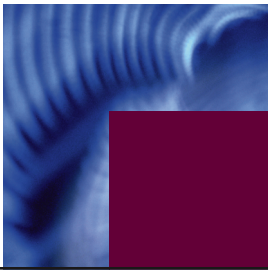
Εκτύπωση: Α. ΑΝΔΡΕΟΥ



Από τον Πρόλογο της 1ης ελληνικής έκδοσης

[...] Λέγεται ότι τα Μαθηματικά – το αποκορύφωμα αυτό του καθαρού λόγου – έχουν αποτελέσει όχι μόνο την κύρια οδό, την άγουσα σε όλους σχεδόν τους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας, αλλά και τη σαφέστερη γλώσσα της διεπιστημονικής επικοινωνίας. Γι' αυτό και η εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της σύγχρονης διδασκαλίας τους, και ίσως το αλφαβητάρι της ανώτερης εκπαίδευσης στις βασικές και τις εφαρμοσμένες επιστήμες. Όμως, ενώ η ελληνική βιβλιογραφία δεν υστερεί σε εισαγωγικά συγγράμματα Απειροστικού Λογισμού, με δυσκολία θα ανακάλυπτε κανείς κάποιο βοήθημα που να εκπληρώνει δύο βασικές προϋποθέσεις: να είναι προσιτό όχι μόνον στον φοιτητή των Μαθηματικών αλλά και στον φοιτητή άλλων επιστημών, και να έχει ευρύτητα παραδειγμάτων και εφαρμογών του Λογισμού από όλους τους κλάδους της σύγχρονης επιστήμης.

Το κλασικό σύγγραμμα των Thomas και Finney εκπληρώνει ακριβώς αυτές τις προϋποθέσεις. Με μια παρουσίαση του Απειροστικού Λογισμού προσεκτικά ζυγισμένη ανάμεσα στην απαραίτητη μαθηματική αυστηρότητα και την ανάγκη να γίνει κατανοητό από κάποιον αμήτο, καταφέρνει χωρίς σημαντικούς συμβιβασμούς να εστιάσει στη χρυσή τομή της βασικής μαθηματικής παιδείας φοιτητών των Μαθηματικών και της Φυσικής, της επιστήμης των Υπολογιστών και του Πολυτεχνείου, της Χημείας και της Βιολογίας, καθώς επίσης και σπουδαστών των Οικονομικών και Κοινωνικών επιστημών με ευρύτερα ενδιαφέροντα. Με έναν πραγματικά εντυπωσιακό αριθμό παραδειγμάτων και προβλημάτων, επιλεγμένων από κάθε εφαρμογή της επιστήμης – από την εξερεύνηση του μακρινού διαστήματος και τα περιβαλλοντικά προβλήματα των ηερηχητικών πτήσεων έως τη δυναμική των χημικών αντιδράσεων, την απορρόφηση του σακχάρου από το αίμα και τους νόμους αύξησης πληθυσμών και βιολογικών μικροοργανισμών, καθώς και θέματα διαχείρισης επιχειρήσεων και ανατοκισμού κεφαλαίων – και εμπλουτισμένο με εκπαιδευτικά προγράμματα για προσωπικούς υπολογιστές που συνοδεύουν σχεδόν κάθε παράγραφο, το βιβλίο επιτυγχάνει να δώσει στον μελετητή του κλασικού αυτού θέματος των Μαθηματικών τον ενθουσιασμό που πηγάζει από τη συνειδητοποίηση της ενότητας της επιστήμης, που τελευταία ολοένα και περισσότερο αναδεικνύεται. Αυτά τα δύο βασικά προσόντα έχουν καθιερώσει τα τελευταία 40 χρόνια το βιβλίο των Thomas και Finney σαν το απαραίτητο βοήθημα που διδάσκεται στα καλύτερα Πανεπιστήμια και Πολυτεχνεία των Η.Π.Α. – όπως το Harvard και το MIT. [...]



Πρόλογος του μεταφραστή

Η επιτυχία που γνώρισε η πρώτη έκδοση του *Απειροστικού Λογισμού* των Thomas και Finney στην Ελλάδα από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης το 1992 (μετάφραση της 6ης αμερικανικής έκδοσης του 1986), μας έπεισε ότι η επανέκδοση αυτού του κλασικού πλέον συγγράμματος ήταν επιβεβλημένη. Στα δώδεκα χρόνια που μεσολάβησαν, το αμερικανικό πρωτότυπο σημείωσε άλλες τέσσερις εκδόσεις, κατά τις οποίες μεταμορφώθηκε και μετεξελίχθηκε σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μιλάμε σήμερα για ένα ριζικά διαφορετικό βιβλίο, με εντελώς διαφορετική διάρθρωση της ύλης, με προσθαφαιρέσεις ολόκληρων ενοτήτων και κεφαλαίων, και με μια γενναία πλέον εισαγωγή στην υπολογιστική τεχνολογία ως απαραίτητο εργαλείο για την κατανόηση του απειροστικού λογισμού.

Από την άλλη, κοινό και θεμελιακό γνώρισμα όλων των εκδόσεων που έχει γνωρίσει το πρωτότυπο είναι η αίσθηση ότι το βιβλίο αυτό αποτελεί βασικό εργαλείο κατανόησης του απειροστικού λογισμού *για φοιτητές από ολόκληρο το φάσμα των εφαρμοσμένων επιστημών*. Υπερβαίνει, δηλαδή, τα παραδοσιακά στεγανά που ήθελαν να διδάσκονται άλλο είδος λογισμού οι μαθηματικοί, άλλο οι φυσικοί, άλλο οι μηχανικοί, άλλο οι βιολόγοι, άλλο οι χημικοί, άλλο οι οικονομολόγοι κ.ο.κ. Οι συγγραφείς το επιτυγχάνουν αυτό αφ' ενός τηρώντας μια σχετική οικονομία στην παράθεση αποδείξεων θεωρημάτων (κάποιοι παρατίθενται στο κυρίως κείμενο, άλλες στα παραρτήματα, και για πολλές άλλες ο αναγνώστης παραπέμπεται σε πιο προχωρημένα συγγράμματα)· αλλά κυρίως παραθέτοντας μια πολύ πλούσια επιλογή εφαρμογών, λυμένων παραδειγμάτων και ασκήσεων που αντλούν τη θεματολογία τους από τον πραγματικό κόσμο και από το σύνολο των εφαρμοσμένων επιστημών. Πρόκειται για την «υπογραφή» των Thomas και Finney και τη συνταγή επιτυχίας ενός βιβλίου που εξακολουθεί να μορφώνει γενεές επιστημόνων και μηχανικών σε δεκάδες χώρες εδώ και δεκαετίες.

Η παρούσα έκδοση εμβαθύνει στην κύρια κατεύθυνση της πρώτης ελληνικής έκδοσης —διακλαδικότητα του Λογισμού και πληθώρα εφαρμογών—, ενώ ταυτόχρονα περιλαμβάνει προσθήκες και βελτιώσεις επί της ουσίας, όπως:

- Η ύλη παρουσιάζεται τώρα σε 14 κεφάλαια, έναντι 18 κεφαλαίων της 1ης έκδοσης. Οι συγγραφείς έχουν προβεί σε τέτοιο βαθμό ανακατάταξης της ύλης, προσθήκης νέων ενοτήτων και αφαίρεσης άλλων, ώστε να είναι αδύνατη η αντιστοίχιση των δύο εκδόσεων για περισσότερες από μερικές, το πολύ, σελίδες: έχει αλλάξει ριζικά η ροή παρουσίασης των εννοιών.
- Ο ίδιος βαθμός «μεταμόρφωσης» εμφανίζεται στις λυμένες εφαρμογές, στα παραδείγματα και στις ασκήσεις στο τέλος κάθε ενότητας.
- Η παρούσα έκδοση περιέχει έναν μεγάλο αριθμό υπολογιστικών εφαρμογών που λύνονται με τη χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας (π.χ. Mathematica ή Maple) οι οποίες απουσιάζουν από την προγενέστερη έκδοση. Με την έλευση της τεχνολογίας των υπολογιστών στην εκπαίδευση (τώρα πλέον σχεδόν κάθε φοιτητής διαθέτει πρόσβαση στο Διαδίκτυο και σε κάποιο σύ-

στημα τύπου Mathematica ή Maple, ή τουλάχιστον σε υπολογιστή γραφικών), οι εφαρμογές αυτές μπορούν να αποτελέσουν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και την όξυνση της αντίληψης του αναγνώστη.

- Τέλος, στο ηλεκτρονικό συμπλήρωμα που είναι διαθέσιμο από την ιστοσελίδα του βιβλίου στο www.cup.gr περιέχονται βιογραφικά και ιστορικά στοιχεία για μεγάλες μορφές των Μαθηματικών.

Όλα τα παραπάνω σκιαγραφούν σε αδρές γραμμές τις διαφορές μεταξύ των δύο εκδόσεων του πρωτοτύπου –της 6ης από την 10η– οι οποίες επιβάλλουν μια νέα ελληνική του έκδοση και, βεβαίως, μια αντίστοιχη νέα μετάφραση από μηδενική βάση.

Ξεκινώντας, λοιπόν, τον Σεπτέμβριο του 2001 την απόδοση στα ελληνικά της 10ης αμερικανικής έκδοσης του *Απειροστικού Λογισμού*, θέσαμε ως στόχο να παραχθεί μια ελληνική έκδοση η οποία (α) δεν θα είχε πολλά να ζηλέψει από την πρωτότυπη έκδοση, και (β) θα στεκόταν στο ύψος των προτύπων ποιότητας που έχουν πλέον καθιερώσει οι Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης στον χώρο του πανεπιστημιακού συγγράμματος στην Ελλάδα.

Μετά από τρία χρόνια προσπάθειας (όχι αδιάλειπτης), και μέσα από μια προσωπική και επαγγελματική διαδρομή που μου δίδαξε πολλά, καταθέτω σήμερα το πόνημα που πόνεσα και με πόνεσε στα χέρια σας. Δεν ισχυρίζομαι ότι είναι άσπογο από γλωσσικής πλευράς, απόδοσης της ορολογίας και τυπογραφικών λαθών. Αλλά αισθάνομαι ότι ανταποκρίνεται με αξιοπρέπεια στους στόχους που αρχικά είχαμε θέσει.

Οι άξονες στους οποίους κινήθηκα είναι οι εξής:

Ορολογία: Βασίστηκα κυρίως σε εξειδικευμένα λεξικά (μαθηματικών, φυσικής, οικονομικών, κ.λπ.). Όπου δεν υπήρχαν κοινώς αποδεκτοί από τους λεξικογράφους όροι (ή όπου για διάφορους λόγους δεν με έπειθαν οι όροι που είχαν προταθεί) προσπάθησα να μελετήσω βιβλία των Π.Ε.Κ. και άλλων αξιόλογων ελλήνων εκδοτών και συγγραφέων προκειμένου να βρω εναλλακτικές προτάσεις. Στην πορεία άρχισα να επεκτείνω τα αναγνώσματά μου σε συγγράμματα ολοένα και πιο απόμακρα από το αντικείμενο του λογισμού (πάντοτε όμως με την προϋπόθεση να ήταν καλογραμμένα). Η όλη διαδικασία με βοήθησε να διαμορφώσω ένα γλωσσικό περιβάλλον στο οποίο άρχισα σιγά-σιγά να κινούμαι με αυτοπεποίθηση και ελευθερία.

Στο σημείο αυτό, οφείλω να αναφερθώ στο γλωσσικό «εργαστήρι» που αθόρυβα και άτυπα, προς το παρόν, έχουν αρχίσει να «στήνουν» οι Π.Ε.Κ.: μια εμπειρία συσσωρευμένη από το δεκαπενταετές και πλέον δούλεμα της γλώσσας στα αμφιθέατρα και στα βιβλία η οποία, όταν θα αποκρυσταλλωθεί σε μια εύχρηστη βάση δεδομένων, θα αποτελεί σημείο αναφοράς για τον μελλοντικό μεταφραστή, πανεπιστημιακό δάσκαλο και ερευνητή, εντός και εκτός των συνόρων της χώρας μας. Έμαθα λοιπόν πολλά από συζητήσεις σε θέματα ορολογίας (και γλωσσικού ήθους γενικότερα) που είχα με τον Στέφανο Τραχανά, τον Γιάννη Παπαδόγγονα, τον Νίκο Κουμπιά και τον Πέτρο Δήτσα. Ένα παράδειγμα είναι η ιδέα των «γλωσσικών πειραμάτων» (στην οποία με μύησε ο Στέφανος) ως μέθοδος όξυνσης του γλωσσικού αισθητηρίου και απόρριψης άστοχων όρων. Η κύρια ιδέα είναι πολύ απλή και συνήθως πολύ αποτελεσματική: πειραματιζόμαστε πάνω σε έναν υποψήφιο όρο, ερευνώντας για παραπλήσιους (ηχητικά και γραμματικά) όρους στη γλώσσα μας (ή και στη γλώσσα του πρωτοτύπου), οι οποίοι μας είναι οικείοι (δηλαδή τους έχουμε αφομοιώσει), προκειμένου να διαπιστώσουμε αν ο υποψήφιος όρος δείχνει να εντάσσεται σε κάποιο γενικότερο πλαίσιο, αν δηλαδή δείχνει να ακολουθεί κάποιον κανόνα: στην περίπτωση αυτή, υπάρχει σοβαρή πιθανότητα να είναι ορθή η επilogή του.

Έτσι, παραδείγματος χάριν, καταλήγουμε στην απόδοση «δικτυότοπος» αντί «δικτυοτόπος», «παραμετρικοποίηση» αντί «παραμετροποίηση», και κατανοούμε

πότε πρέπει να πούμε «μετάλλινος» και όχι «μεταλλικός», πότε «γραμματός» και όχι «γραμμακός», κ.ο.κ.

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι με τη μέθοδο αυτή όχι μόνο οδηγούμαστε συχνότατα στον ορθό όρο, αλλά, πολύ σπουδαιότερο, αρχίζουμε να ψηλαφίζουμε εμπειρικά (και να εμπεδώνουμε στη συνέχεια ορθολογικά) τους κανόνες της γλώσσας μας που η ενστικτώδης καθημερινή χρήση έχει καλύψει με λήθη. Η μέθοδος εύρεσης της λύσης έχει πολύ μεγαλύτερη αξία από την ίδια τη λύση.

Ωστόσο, μερικές φορές καλούμαστε να παραβιάσουμε τον «κανόνα» που ανακαλύπτουμε, προκειμένου να μην διαπράξουμε μια γλωσσική βαρβαρότητα. Και στο σημείο αυτό ακριβώς είναι που λειαιίνεται το γλωσσικό ένστικτο, εκλεπτυνόμενο με τη διαρκή άσκηση και τον καημό της γλώσσας.

Έξω από το περιβάλλον των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, ο άνθρωπος στον οποίο οφείλω το μεγαλύτερο ευχαριστώ, είναι ο Μανώλης Μαραγκάκης, καθηγητής μαθηματικών στο Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Ένας παθιασμένος με την αυστηρή σκέψη και την ακριβή έκφραση μαθηματικός, τον οποίο ευτύχησα να έχω δάσκαλο και φίλο, 20 χρόνια τώρα. Περάσαμε μαζί ώρες και ώρες συζητώντας για τα μαθηματικά και την ορολογία, αναζητώντας όρους στη βιβλιογραφία και διερευνώντας πιθανές λύσεις σε προβλήματα γλώσσας και έκφρασης που προέκυπταν κατά τη μετάφραση.

Ευχαριστώ ακόμη τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Κανάρη Τσίγανο –πρώτο «πατέρα» του βιβλίου– για την τελική ανάγνωση του χειρογράφου.

Όλοι οι παραπάνω με βοήθησαν να αποφύγω πολλές κακοτοπιές στην ορολογία και στην έκφραση. Τα όποια λάθη παραμένουν αποτελούν δική μου ευθύνη, όμως το βιβλίο θα ήταν κατά πολύ ατελέστερο χωρίς τη συνδρομή τους. Θα ήμουν ευγνώμων στον αναγνώστη για υποδείξεις λαθών και αβλεψιών, άστοχης ορολογίας και γλωσσικών ατοπημάτων, ώστε να διορθωθούν στην επόμενη έκδοση.

Μονάδες: Έχοντας κατά νου τον Έλληνα αναγνώστη, μετέτρεψα παντού τις μονάδες στο Διεθνές Σύστημα. Πρόκειται συνολικά για πάνω από 130 λυμένα παραδείγματα, εφαρμογές και ασκήσεις. Η μετατροπή δεν ήταν «τυφλή», δηλαδή απλή μετατροπή των ποδιών σε μέτρα, των μιλίων σε χιλιόμετρα, των λιβρών σε κιλά, των βαθμών Fahrenheit σε Κελσίου κ.λπ. Άλλαξα τους αριθμούς ώστε οι νέες ποσότητες να διατηρήσουν τη φυσική σημασία τους στο νέο πρόβλημα αλλά και για να βγαίνουν «στρωτές» οι απαντήσεις, οι οποίες παρατίθενται στο τέλος του βιβλίου.



Προτού κλείσω το σημείωμα αυτό, θέλω να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ στη Διονυσία Δασκάλου, γενική επιμελήτρια των Π.Ε.Κ. και κινητήριο δύναμη του βιβλίου ετούτου· η Διονυσία επέβλεψε τη διαδικασία «παραγωγής» του βιβλίου και τον συντονισμό όλων των επιμέρους παραγόντων που προσδιορίζουν το τελικό αποτέλεσμα. Την ευχαριστώ επίσης για την ιώβαιο υπομονή της με τις καθυστερήσεις που προξένησα στην έκδοση, καθώς και για την όλη χαρά που μου έδωσε η συνεργασία μαζί της (και μαζί με όλα τα «παιδιά των Π.Ε.Κ.») κατά το διάστημα που δούλεα κοντά τους για το βιβλίο.

Τέλος, ας μου επιτραπεί να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Ιωάννη και Χρυσούλα, για όλη τους την υποστήριξη και πίστη σε μένα, τα δύσκολα αυτά χρόνια που ενώ δούλεα πάνω στον *Λογισμό*, προσπαθούσα ταυτόχρονα να στεριώσω στην Κρήτη τη ζωή μου και τα οράματά μου μετά από δεκαετή παραμονή στο εξωτερικό. Τελικά, από μια μαγική συγκυρία της τύχης (ή από μια βαθύτερη αναγκαιότητα) βρέθηκα ξανά μακριά από την Ελλάδα, αλλά πάλι σ' ένα εκδοτικό περιβάλλον: ως επιμελητής στο περιοδικό *Physical Review* στη Νέα Υόρκη. Όμως, «ο Έλληνας επιστρέφει στον τόπο του από τον πιο μακρύ δρόμο», όπως λέει κι ο ποιητής. Φαίνεται πως η ώρα της δικής μου επιστροφής δεν είχε σημάνει ακόμη...

Περιεχόμενα

Ασκήσεις με συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας	xv
Προς τον διδάσκοντα	xvii
Προς τον φοιτητή	xxiii

0 Προκαταρκτικά

1 Ευθείες	1
2 Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις	10
3 Εκθετικές συναρτήσεις	24
4 Αντίστροφες συναρτήσεις και λογάριθμοι	31
5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους	44
6 Παραμετρικές εξισώσεις	58
7 Μοντέλα μεταβολών	66
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	74
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	75
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	79

1 Όρια και συνέχεια

1.1 Ρυθμοί μεταβολής και όρια	83
1.2 Εύρεση ορίων και πλευρικών ορίων	97
1.3 Άπειρα όρια	109
1.4 Συνέχεια	120
1.5 Εφαπτόμενες ευθείες	130
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	137
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	138
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	139

2 Παράγωγοι

2.1 Η παράγωγος ως συνάρτηση	143
2.2 Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής	156
2.3 Παράγωγοι γινομένου, πηλίκου και αρνητικής δύναμης	169
2.4 Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων	175
2.5 Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης	182
2.6 Παραγωγή πεπλεγμένης συνάρτησης	193

2.7 Συναφείς ρυθμοί	201
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	210
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	211
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	215

3

Εφαρμογές των παραγώγων

3.1 Ακρότατα συναρτήσεων.....	219
3.2 Θεώρημα μέσης τιμής και διαφορικές εξισώσεις	231
3.3 Το σχήμα της γραφικής παράστασης	239
3.4 Γραφική επίλυση αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων	251
3.5 Κατασκευή μοντέλων και βελτιστοποίηση	259
3.6 Γραμμικοποίηση και διαφορικά	276
3.7 Μέθοδος του Νεύτωνα	289
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	297
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	297
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	301

4

Ολοκλήρωση

4.1 Αόριστα ολοκληρώματα, διαφορικές εξισώσεις και μαθηματικά μοντέλα	305
4.2 Κανόνες ολοκλήρωσης· Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	314
4.3 Εκτίμηση ποσοτήτων με χρήση πεπερασμένων αθροισμάτων	320
4.4 Αθροίσματα Riemann και ορισμένα ολοκληρώματα.....	331
4.5 Θεώρημα μέσης τιμής και θεμελιώδεις θεώρημα	342
4.6 Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων με αντικατάσταση	354
4.7 Αριθμητική ολοκλήρωση	361
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ.....	373
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	374
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	378

5

Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

5.1 Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις και περιστροφή γύρω από άξονα.....	381
5.2 Μοντέλα όγκων με χρήση κυλινδρικών φλοιών	394
5.3 Μήκη καμπυλών στο επίπεδο	400
5.4 Ελατήρια, αντλίες και ανελκυστήρες.....	407
5.5 Δυνάμεις ρευστών	418
5.6 Ροπές και κέντρα μάζας	425
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	436
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	437
ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	439

6

Υπερβατικές συναρτήσεις και διαφορικές εξισώσεις

6.1 Λογάριθμοι	441
6.2 Εκθετικές συναρτήσεις.....	450

6.3	Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων· Ολοκληρώματα ...	461
6.4	Διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως	468
6.5	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.....	482
6.6	Η μέθοδος του Euler· Πληθυσμιακά μοντέλα	491
6.7	Υπερβολικές συναρτήσεις	504
	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	514
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	514
	ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	518

7

Τεχνικές ολοκλήρωσης, ο κανόνας του L'Hôpital και γενικευμένα ολοκληρώματα

7.1	Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης	521
7.2	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.....	528
7.3	Μερικά κλάσματα	536
7.4	Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις	546
7.5	Τύποι ολοκληρωμάτων, συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας και ολοκλήρωση με τη μέθοδο Monte Carlo	551
7.6	Ο κανόνας του L'Hôpital.....	559
7.7	Γενικευμένα ολοκληρώματα	567
	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ	579
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	580
	ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΘΕΩΡΙΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	582

8

Άπειρες σειρές

8.1	Όρια ακολουθιών	587
8.2	Υποακολουθίες, φραγμένες ακολουθίες και η μέθοδος Picard	599
8.3	Άπειρες σειρές	607
8.4	Σειρές με μη αρνητικούς όρους	619
8.5	Εναλλασσόμενες σειρές, απόλυτη σύγκλιση και υπό συνθήκη σύγκλιση	630
8.6	Δυναμοσειρές	639
8.7	Σειρές Taylor και Maclaurin	648
8.8	Εφαρμογές δυναμοσειρών	661
8.9	Σειρές Fourier	668
8.10	Σειρές Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων	675

9

Διανύσματα στο επίπεδο και πολικές συναρτήσεις.....

9.1	Διανύσματα στο επίπεδο	691
9.2	Εσωτερικά γινόμενα	702
9.3	Διανυσματικές συναρτήσεις	711
9.4	Μαθηματική περιγραφή της κίνησης βλήματος	722
9.5	Πολικές συντεταγμένες και διαγράμματα	733
9.6	Απειροστικός λογισμός πολικών καμπυλών	742

10

Διανύσματα και κίνηση στον χώρο

10.1	Καρτεσιανές συντεταγμένες και διανύσματα στον χώρο	757
10.2	Εσωτερικά και εξωτερικά γινόμενα	766
10.3	Ευθείες και επίπεδα	776
10.4	Κύλινδροι και καμπύλες δευτέρου βαθμού.....	785
10.5	Διανυσματικές συναρτήσεις και καμπύλες στον χώρο	794
10.6	Μήκος τόξου και το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα T	807
10.7	Το σύστημα αναφοράς INB : εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης	816
10.8	Κινήσεις πλανητών και δορυφόροι	825

11

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και οι παράγωγοί τους

11.1	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	841
11.2	Όρια και συνέχεια σε περισσότερες από μία διαστάσεις	851
11.3	Μερικές παράγωγοι	858
11.4	Ο κανόνας αλυσιδωτής παραγωγίσης	870
11.5	Παράγωγοι κατά κατεύθυνση, διανύσματα κλίσεως και εφαπτόμενα επίπεδα	878
11.6	Γραμμικοποίηση και διαφορικά	893
11.7	Ακρότατα και σαγματικά σημεία	903
11.8	Πολλαπλασιαστές Lagrange	914
11.9	Μερικές παράγωγοι συναρτήσεων των οποίων οι μεταβλητές υπόκεινται σε περιοριστική συνθήκη	925
11.10	Τύπος Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών	930

12

Πολλαπλά ολοκληρώματα

12.1	Διπλά ολοκληρώματα.....	943
12.2	Εμβαδά, ροπές και κέντρα μάζας	954
12.3	Διπλά ολοκληρώματα σε πολική μορφή	967
12.4	Τριπλά ολοκληρώματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες	974
12.5	Μάζες και ροπές σε τρεις διαστάσεις.....	984
12.6	Τριπλά ολοκληρώματα σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες	990
12.7	Αντικαταστάσεις σε πολλαπλά ολοκληρώματα.....	1003

13

Ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων.....

13.1	Επικαμπύλια ολοκληρώματα	1017
13.2	Διανυσματικά πεδία, έργο, κυκλοφορία και ροή	1023
13.3	Ανεξαρτησία από τη διαδρομή, συναρτήσεις δυναμικού και συντηρητικά πεδία	1035
13.4	Θεώρημα Green στο επίπεδο	1043
13.5	Εμβαδόν επιφάνειας και επιφανειακά ολοκληρώματα	1056
13.6	Παραμετροποιημένες επιφάνειες	1067
13.7	Θεώρημα Stokes	1077
13.8	Θεώρημα απόκλισης· ενιαία μορφή θεωρημάτων ολοκλήρωσης.....	1087

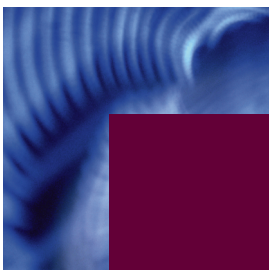
Παραρτήματα

Π.1	Μαθηματική επαγωγή.....	Π-1
Π.2	Αποδείξεις των θεωρημάτων ορίων της Ενότητας 1.2.....	Π-4
Π.3	Απόδειξη του κανόνα αλυσιδωτής παραγωγής.....	Π-7
Π.4	Μιγαδικοί αριθμοί	Π-8
Π.5	Ο κανόνας του Simpson («κανόνας του ενός τρίτου»).....	Π-19
Π.6	Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy και η ισχυρή εκδοχή του κανόνα του L'Hôpital.....	Π-20
Π.7	Συχνοεμφανιζόμενα όρια	Π-23
Π.8	Απόδειξη του θεωρήματος Taylor.....	Π-24
Π.9	Ο επιμεριστικός νόμος για εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων.....	Π-26
Π.10	Ορίζουσες και ο κανόνας Cramer	Π-27
Π.11	Θεώρημα μεικτών παραγώγων και θεώρημα των μεταβολών.....	Π-34
Π.12	Εμβαδόν προβολής παραλληλογράμμου σε επίπεδο	Π-38

Απαντήσεις στις ασκήσεις περιττής αρίθμησης των κεφαλαίων

Ευρετήριο

Συνοπτικός πίνακας ολοκληρωμάτων



Ασκήσεις με συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας

0 Προκαταρκτικά

- 0.7 Προσαρμογή καμπυλών σε πειραματικά δεδομένα, ανάλυση σφαλμάτων, προβλέψεις και βελτίωση του μοντέλου όπου αυτό είναι εφικτό.

1 Όρια και συνέχεια

- 1.1 Σύγκριση μεταξύ γραφικών εκτιμήσεων ορίων και συμβολικών υπολογισμών ορίων που εκτελούνται με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας. Διερεύνηση του αυστηρού ορισμού του ορίου με γραφική εύρεση του δ για δεδομένο ε .
- 1.3 Διερεύνηση των ασυμπτωτών και της συμπεριφοράς γραφικής παράστασης καθώς $x \rightarrow \pm \infty$.
- 1.5 Γραφική και αριθμητική διερεύνηση των μέσων ρυθμών μεταβολής και των εφαπτόμενων ευθειών.

2 Παράγωγοι

- 2.1 Γραφική διερεύνηση σύγκλισης των τεμνουσών ευθειών. Εύρεση παραγώγου συναρτήσεως με χρήση του ορισμού. Διερεύνηση της σχέσεως μεταξύ των γραφημάτων των f και f' και σχεδίαση εφαπτόμενων ευθειών.
- 2.2 Διερεύνηση των παραγώγων με κινούμενα γραφικά, για τις συναρτήσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης.
- 2.4 Διερεύνηση της αρμονικής ταλάντωσης και της φθίνουσας ταλάντωσης.
- 2.5 Διερεύνηση τριγωνομετρικών «πολυωνυμικών» προσεγγίσεων για πριονωτές και κλιμακωτές συναρτήσεις. Γραφική σχεδίαση καμπυλών που ορίζονται παραμετρικά, σε κοινό γράφημα με μια καθορισμένη εφαπτόμενη ευθεία.
- 2.6 Εύρεση παραγώγου για πεπλεγμένες συναρτήσεις. Σχεδίαση καμπυλών πεπλεγμένων συναρτήσεων σε κοινό γράφημα με μια καθορισμένη εφαπτόμενη ευθεία.

3 Εφαρμογές των παραγώγων

- 3.1 Εύρεση απόλυτων ακροτάτων από γραφική και αριθμητική ανάλυση των f και f' .

- 3.2 Γραφική σχεδίαση λύσεων διαφορικών εξισώσεων.
- 3.3 Διερεύνηση οικογενειών πολωνύμων τρίτου και τέταρτου βαθμού και λογιστικών συναρτήσεων.
- 3.5 Μελέτη αντοχής και δυσκαμψίας δοκαριού και της σχέσης αυτών με σημεία καμπής. Διερεύνηση κωνικών όγκων που παράγονται από κυκλικό δίσκο. Διερεύνηση τριγώνου περιγεγραμμένου σε έλλειψη.
- 3.6 Εύρεση γραμμικοποιήσεων. Διερεύνηση του απόλυτου σφάλματος γραμμικοποίησης, συγκρίνοντας το γράφημα της γραμμικοποίησης με αυτό της συναρτήσεως.
- 3.7 Εύρεση σημείων μηδενισμού συναρτήσεων με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Προσεγγιστικός υπολογισμός των αριθμών $\sqrt{2}$, π , και e .

4 Ολοκλήρωση

- 4.1 Επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών.
- 4.3 Εύρεση μέσης τιμής της $f(x)$ και του σημείου (ή των σημείων) όπου προκύπτει η τιμή αυτή. Προσεγγιστικός υπολογισμός όγκων με πεπερασμένα αθροίσματα.
- 4.4 Διερεύνηση αθροισμάτων Riemann και των ορίων τους.
- 4.5 Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και των $f(x)$ και $f'(x)$. Ανάλυση της $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$.
- 4.7 Αριθμητικός υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων.

5 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

- 5.1 Εύρεση όγκων στερεών εκ περιστροφής (που προκύπτουν από περιστροφή ως προς τον άξονα x κυκλικών και δακτυλιοειδών διατομών).
- 5.3 Εκτίμηση μήκους καμπυλών οι οποίες ορίζονται ρητά ή παραμετρικά.
- 5.4 Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ έργου και κινητικής ενέργειας.

6 Υπερβατικές συναρτήσεις και διαφορικές εξισώσεις

- 6.1 Διερεύνηση της γραμμικοποίησης του $\ln(1+x)$ στο $x=0$.
- 6.2 Διερεύνηση των γραμμικοποιήσεων των e^x , $2x$, και $\log_3 x$. Διερεύνηση των αντίστροφων συναρτήσεων και των παραγώγων τους.
- 6.4 Μελέτη της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει τη χρονική μεταβολή μιας ποσότητας γλυκόζης που χορηγείται ενδοφλεβίως στο αίμα ασθενούς. Σχεδίαση πεδίων κλίσεως και καμπυλών λύσεως για διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις.
- 6.6 Σχεδίαση πεδίων κλίσεως και μελέτη λύσεων της τροποποιημένης λογιστικής εξίσωσης. Εύρεση αριθμητικών λύσεων με χρήση της μεθόδου Euler και της βελτιωμένης μεθόδου Euler. Γραφική, αναλυτική και αριθμητική διερεύνηση λύσεων σε προβλήματα αρχικών τιμών και σύγκριση των επιμέρους αποτελεσμάτων.

7 Τεχνικές ολοκλήρωσης, ο κανόνας του L'Hôpital και γενικευμένα ολοκληρώματα

- 7.5 Χρήση συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας για την εκτέλεση ολοκλήρωσης. Ένα παράδειγμα ολοκληρώματος που δεν μπορεί να υπολογιστεί με σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας. Ολοκλήρωση Monte Carlo.
- 7.7 Διερεύνηση σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων που περιέχουν τον όρο $x^p \ln x$.

Υπολογιστικές διερευνήσεις

Οι ασκήσεις αυτές αριθμούν περισσότερες από 200, και έχουν λυθεί στα εγχειρίδια λύσεων [της αμερικανικής έκδοσης] τόσο με τη *Mathematica* όσο και τη *Maple*. Επιπλέον, υπάρχουν κατάλληλες εφαρμογές *Mathematica* και *Maple* στον δικτυότοπο. Οι τελευταίες έχουν σχεδιαστεί αποσκοπώντας στην ανάπτυξη της γεωμετρικής διαίσθησης και στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, των μεθόδων και των εφαρμογών του απειροστικού λογισμού. Εικονίδια με την ένδειξη CD-ROM/Δικτυότοπος εμφανίζονται στα αντίστοιχα σημεία στο κείμενο.

Στο κείμενο παρατίθενται ακόμη σημειώσεις που ενθαρρύνουν τον φοιτητή να διερευνήσει τις έννοιες με υπολογιστή γραφικών, για να αρχίσει έτσι να αντιλαμβάνεται πότε η εφαρμογή της τεχνολογίας αποβαίνει μαθησιακά χρήσιμη και πότε αποπροσανατολιστική.

CD-ROM



Δικτυότοπος

Βιογραφικά στοιχεία

Ιστορικές αναφορές και Βιογραφίες

Η παρουσίαση της ανθρώπινης πλευράς της μαθηματικής επιστήμης κατά την πορεία της εξέλιξής της μορφώνει και εκλεπτύνει την αίσθηση του φοιτητή. Στις προηγούμενες εκδόσεις είχαμε ενθέσει στο κείμενο αναφορές που περιέγραφαν την προέλευση των διάφορων ιδεών, τις συγκρούσεις σχετικά με την πατρότητά τους, καθώς και ενδιαφέρουσες προεκτάσεις σε σύγχρονα αντικείμενα όπως τα μορφοκλασματικά (φράκταλ) και το χάος. Στην παρούσα έκδοση έχουμε διευρύνει τις αναφορές αυτές, και τις έχουμε ενσωματώσει στο CD-ROM και στον δικτυότοπο, όπως δείχνουν τα αντίστοιχα εικονίδια στο κείμενο, αφήνοντας έτσι περισσότερο χώρο στο περιθώριο κάθε σελίδας για σημειώσεις του φοιτητή ή για δικά μας σχόλια.

Οι διαφορετικές όψεις του βιβλίου

Τα μαθηματικά είναι μια αυστηρή και όμορφη γλώσσα

Ο λογισμός αποτελεί μια από τις ισχυρότερες πνευματικές κατακτήσεις του ανθρώπου. Ένας από τους στόχους του βιβλίου τούτου είναι να εμπνεύσει στον φοιτητή την εκτίμηση της ομορφιάς του απειροστικού λογισμού. Όπως και στις προηγούμενες εκδόσεις, σταθήκαμε προσεκτικοί στο να πούμε μονάχα ό,τι είναι αληθές και μαθηματικά στηρίξιμο. Κάθε ορισμός, θεώρημα, πόρισμα και απόδειξη έχει αναθεωρηθεί με γνώμονα τη σαφήνεια και τη μαθηματική ορθότητα.

Ανεξάρτητα από το αν η διδασκαλία του αντικειμένου γίνεται με το παραδοσιακό ύφος των διαλέξεων ή στο υπολογιστικό εργαστήριο με μεθόδους αριθμητικών και γραφικών διερευνήσεων, οι έννοιες και οι τεχνικές του απειροστικού λογισμού πρέπει να μεταδοθούν με σαφήνεια και ακρίβεια.

Ο φοιτητής θα συνεχίσει να μαθαίνει από το βιβλίο για πολλά χρόνια ακόμη

Από πρόθεση έχουμε συμπεριλάβει πολύ περισσότερη ύλη στο βιβλίο απ' όση μπορεί να διδάξει οποιοσδήποτε διδάσκων. Έτσι, ο φοιτητής μπορεί να συνεχίσει να μαθαίνει λογισμό από το βιβλίο πολύ μετά το πέρας του συγκεκριμένου μαθήματος που παρακολουθεί, ενώ ο επαγγελματίας μηχανικός και ο επιστήμονας θα μπορεί να ανατρέχει στο βιβλίο όποτε οι περιστάσεις το απαιτήσουν.

Στην αγγλική γλώσσα διατίθενται από τον εκδότη της πρωτότυπης έκδοσης (Addison-Wesley) βοηθήματα για τον διδάσκοντα και τον φοιτητή. Αναλυτικές πληροφορίες για αυτά μπορεί να βρει ο αναγνώστης στη διεύθυνση <http://www.awl.com/thomas> αλλά και στον δικτυότοπο των ΠΕΚ (www.cup.gr).

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς εκφράζουν τις ευχαριστίες τους για την πολύτιμη συνεισφορά των παρακάτω συναδέλφων που έκαναν διάφορες χρήσιμες υποδείξεις:

Επιμέλεια κειμένου, τελική ανάγνωση χειρογράφου

Tuncay Aktosun, North Dakota State University
 Andrew G. Bennett, Kansas State University
 Terri A. Bourdon, Virginia Polytechnic Institute and State University
 Mark Brittenham, University of Nebraska, Lincoln
 Bob Brown, Essex Community College
 David A. Edwards, University of Delaware
 Mark Farris, Midwestern State University
 Kim Jongerius, Northwestern College
 Jeff Knisley, East Tennessee State University
 Slawomir Kwasik, Tulane University
 Jeuel LaTorre, Clemson University
 Daniel G. Martinez, California State University, Long Beach
 Sandra E. McLaurin, University of North Carolina, Wilmington
 Stephen J. Merrill, Marquette University
 Shai Neumann, Brevard Community College
 Linda Powers, Virginia Polytechnic Institute and State University
 William L. Siegmann, Rensselaer Polytechnic Institute
 Rick L. Smith, University of Florida
 James W. Thomas, Colorado State University
 Abraham Ungar, North Dakota State University
 Harvey E. Wolff, University of Toledo

Επιμέλεια υπολογιστικών εφαρμογών

Mark Brittenham, University of Nebraska, Lincoln
 Warren J. Burch, Brevard Community College, Cocoa
 Lyle Cochran, Whitworth College
 Philip S. Crooke III, Vanderbilt University
 Linda Powers, Virginia Polytechnic Institute and State University
 David Ruch, Metropolitan State College of Denver
 Paul Talaga, Weber State University
 James W. Thomas, Colorado State University
 Robert L. Wheeler, Virginia Polytechnic Institute and State University

Άλλου τύπου συνεισφορές

Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν οι Colonel D. Chris Arney, John L. Scharf, και Marie M. Vanisko που μοιράστηκαν μαζί μας τις τεχνικές και υπολογιστικές τους γνώσεις προκειμένου να κάνουμε τον απειροστικό λογισμό ελκυστικότερο στον φοιτητή, καθώς και οι Colonel D. Chris Arney και Joe B. Albree για τη συνδρομή τους στις ιστορικές αναφορές του απειροστικού λογισμού. Είμαστε ευγνώμονες σε όλους τους παραπάνω για την αφοσίωσή τους, την ενθάρρυνσή τους, και τον συντονισμό τους ως ομάδα κατά τη σύλληψη και εν συνεχεία κατά τη δημιουργία των υπολογιστικών εφαρμογών και τη συγκέντρωση των βιογραφικών και των ιστορικών στοιχείων. Ευχαριστούμε επίσης τον John L. Scharf για τη συνδρομή του στα εγχειρίδια των λύσεων.



Προς τον φοιτητή

Τι είναι ο απειροστικός λογισμός;

Είναι τα μαθηματικά της κίνησης και της μεταβολής. Όπου υπάρχει κίνηση ή εξέλιξη, όπου υπάρχουν μεταβαλλόμενες δυνάμεις που δρουν σε σώμα και προκαλούν την επιτάχυνσή του, ο λογισμός είναι το κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο που πρέπει να εφαρμόσουμε. Έτσι είχαν τα πράγματα στην αρχή της εξέλιξης του λογισμού, έτσι έχουν και σήμερα.

Ο απειροστικός λογισμός αναπτύχθηκε καταρχάς προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι μαθηματικές ανάγκες των επιστημόνων του δεκάτου έκτου και δεκάτου εβδόμου αιώνα, ανάγκες που κατά κύριο λόγο αφορούσαν στη μηχανική. Ο διαφορικός λογισμός έδωσε λύση στο πρόβλημα υπολογισμού ρυθμών μεταβολής. Αυτό οδήγησε στον ορισμό της κλίσης καμπυλών, στον υπολογισμό ταχυτήτων και επιταχύνσεων κινούμενων σωμάτων, στην εύρεση γωνιών εκτόξευσης που θα έδιναν στα κανόνια τη μέγιστη ακτίνα δράσεως, και στην εύρεση των χρονικών στιγμών όπου οι πλανήτες θα απείχαν μια ελάχιστη ή μια μέγιστη απόσταση μεταξύ τους. Ο ολοκληρωτικός λογισμός έλυσε το πρόβλημα προσδιορισμού μιας συνάρτησης της οποίας ο ρυθμός μεταβολής είναι γνωστός. Αυτό επέτρεψε τον υπολογισμό της μελλοντικής θέσης ενός σώματος όταν ξέρουμε την τωρινή του θέση και τις δυνάμεις που δρουν πάνω του· ακόμη, τον υπολογισμό εμβαδού ακανόνιστων χωρίων στο επίπεδο, τη μέτρηση μήκους καμπύλης, και την εύρεση του όγκου και της μάζας τυχόντος στερεού σώματος.

Σήμερα, ο λογισμός και οι προεκτάσεις του στη μαθηματική ανάλυση βρίσκουν τεράστιο εύρος εφαρμογών, τόσο που θα θάμπωνε τους πρωτεργάτες φυσικούς, μαθηματικούς και αστρονόμους που τον ανέπτυξαν. Ελπίζουμε ότι κι εσείς με τη σειρά σας θα εκτιμήσετε τη μεγάλη ποικιλία προβλημάτων που λύνονται με τις μεθόδους του λογισμού, καθώς και την πληθώρα των επιστημονικών πεδίων που χρησιμοποιούν μοντέλα του απειροστικού λογισμού για να εξηγήσουν το σύμπαν και τον κόσμο που μας περιβάλλει. Σκοπός της παρούσας έκδοσης είναι να παρουσιάσει μια σύγχρονη όψη του Λογισμού, με την υποστήριξη της τεχνολογίας των υπολογιστών.

Πώς να μάθετε απειροστικό λογισμό

Η κατανόηση του απειροστικού λογισμού διαφέρει από την εκμάθηση της αριθμητικής, της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Σε εκείνα τα αντικείμενα, μάθατε κυρίως πώς να κάνετε πράξεις με αριθμούς· πώς να απλοποιείτε αλγεβρικές εκφράσεις και να υπολογίζετε μεταβλητές· και πώς να επιχειρηματολογείτε περί σημείων, ευθειών και σχημάτων στο επίπεδο. Ο λογισμός περιλαμβάνει τις τεχνικές και τις δεξιότητες αυτές αλλά αναπτύσσει και νέες, μεγαλύτερης ακρίβειας και βάθους. Είναι τόσες πολλές αυτές οι νέες τεχνικές που

καλείστε να κατακτήσετε, ώστε είναι αδύνατον να τις μάθετε μόνο στο μάθημα. Θα χρειαστεί αρκετός χρόνος μοναχικής μελέτης στο σπίτι και συνεργασία με συμφοιτητές σας. Τι πρέπει λοιπόν να κάνετε για να μάθετε;

1. *Μελετήστε το κείμενο.* Είναι αδύνατον να εμπεδώσετε τις έννοιες και τις μεταξύ τους σχέσεις πηγαίνοντας κατευθείαν στις προς επίλυση ασκήσεις. Πρέπει λοιπόν να διαβάσετε τα αντίστοιχα χωρία στο κείμενο και να ελέγξετε τα λυμένα παραδείγματα βήμα προς βήμα. Το «διαγώνιο» διάβασμα δεν ωφελεί εδώ! Αντιθέτως πρέπει να διαβάσετε και να κατακτήσετε με τη λογική σας κάθε λεπτομέρεια, βήμα προς βήμα. Αυτό το είδος της μελέτης, που είναι απαραίτητο για κάθε ανάγνωσμα βαθυστόχαστου ή τεχνικού περιεχομένου, απαιτεί συγκέντρωση, υπομονή και εξάσκηση.
2. *Λύστε τις ασκήσεις που έχετε για το σπίτι, έχοντας κατά νου τα εξής:*
 - (α) *Κάντε διαγράμματα* όπου είναι δυνατόν.
 - (β) *Γράψτε τις λύσεις σας αναπτύσσοντας τη λογική αλληλουχία των σκέψεών σας*, σαν να τις εξηγούσατε σε κάποιον τρίτο.
 - (γ) *Αναρωτηθείτε γιατί* υπάρχει κάθε άσκηση που συναντάτε. Γιατί σας ανατέθηκε να τη λύσετε; Ποια η σχέση της με άλλες ασκήσεις;
3. *Χρησιμοποιήστε τον υπολογιστή σας γραφικών* όπου είναι δυνατόν. Λύστε όσο το δυνατόν περισσότερες ασκήσεις γραφικής και υπολογιστικής διερεύνησης, ανεξαρτήτως αν σας έχουν ανατεθεί ή όχι. Οι γραφικές παραστάσεις προσδίδουν ενόραση και βοηθούν στην οπτική εποπτεία πολλών σημαντικών εννοιών και σχέσεων. Οι πίνακες αριθμητικών δεδομένων μπορεί να αποκαλύψουν κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά όταν παρασταθούν γραφικά. Ο υπολογιστής σας λοιπόν σας δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσετε ρεαλιστικά προβλήματα και παραδείγματα που εμπεριέχουν υπολογισμούς δύσκολους ή και κοπιώδεις αν τους κάνετε με το χέρι.
4. *Προσπαθήστε να περιγράψετε με λίγα λόγια τα κύρια σημεία* κάθε ενότητας που μελετήσατε. Αν είστε σε θέση να κάνετε τέτοιου είδους περιγραφές, σημαίνει ότι μάλλον κατέχετε την ύλη. Αν όχι, τότε γνωρίζετε ότι υπάρχουν κενά στην κατανόησή σας.

Η κατανόηση του απειροστικού λογισμού είναι μία διεργασία· δεν συντελείται αυτόματα. Πρέπει να έχετε υπομονή, επιμονή, να θέτετε στον εαυτό σας ερωτήματα, να συζητάτε τις έννοιες και τις ασκήσεις με τους συμφοιτητές σας, και μόλις νιώθετε ότι χρειάζεστε βοήθεια, να τη ζητάτε αμέσως. Η ανταμοιβή της κατάκτησης του απειροστικού λογισμού μπορεί να είναι μεγάλη, τόσο πνευματικά όσο και επαγγελματικά.